MATEMATIK | **Hjälpmedel: inga**
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Datum: 140313 kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: Tomas Wernstål
0703 088 304

LMA033b och LMA515c

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

För godkänt på tentan krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2014 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 33 resp. 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.

Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

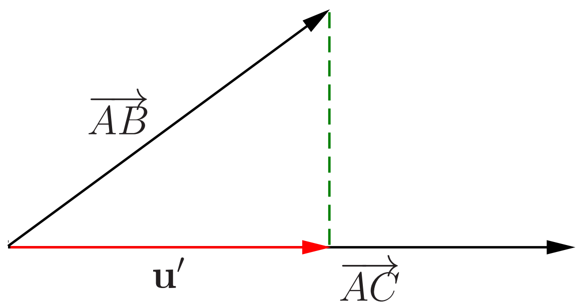
Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (15p)

2. (a) Bevisa projektionssatsen i det fall då vektorn **a** och vektorn **b** bildar spetsig vinkel med varandra. (3p)

(b) Antag att punkterna $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, 4, 5)$ och $C = (2, 2, 4)$ är givna i ett ONH-system. Beräkna projektionen av vektorn $\overrightarrow{AB}$ på vektorn $\overrightarrow{AC}$. (2p)

Lösning:



$\overrightarrow{AB} = (2, 4, 5) - (1, 2, 3) = (1, 2, 2)$ och $\overrightarrow{AC} = (2, 2, 4) - (1, 2, 3) = (1, 0, 1)$.

Ortogonala projektionen $\mathbf{u}'$ av vektorn $\overrightarrow{AB}$ på vektorn $\overrightarrow{AC}$ ges av

$$\mathbf{u}' = \frac{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|^2}\overrightarrow{AC} = \frac{(1, 2, 2) \bullet (1, 0, 1)}{2}(1, 0, 1) = \frac{3}{2}(1, 0, 1).$$

3. (a) Visa att volymen av tetraedern ABCD ges av formeln (4p)

$$V_{\text{ABCD}} = \pm\frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \bullet \overrightarrow{AD}.$$

(b) I ett ONH- system är punkterna $A = (1, 0, 2), B = (2, 1, 2)$ och $C = (3, 1, 3)$ givna. Beräkna arean av triangeln ABC. (3p)

Lösning:

Bilda vektorerna $\overrightarrow{AB} = (2,1,2)-(1,0,2) = (1,1,0)$ och $\overrightarrow{AC} = (3,1,3)-(1,0,2) = (2,1,1)$. Vi får då att

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_x \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{e}_y \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{e}_z \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$1\mathbf{e}_x - 1\mathbf{e}_y - 1\mathbf{e}_z = (1,-1,-1)$.

Arean blir då

$$T = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}\|(1,-1,-1)\| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

4. Låt ES vara ekvationssystemet $\begin{cases} 3x & - & y & + & z & = & 3 \\ 6x & - & 2y & + & 5z & = & 0 \\ 3x & - & y & - & 2z & = & 9 \end{cases}$.

(a) Lös ES med eliminationsmetoden på matrisform. (4p)

(b) Tolka lösningsmängden L geometriskt. (1p)

Lösning:

Vi genomför följande radoperationer

$$R_1 \mapsto \frac{1}{3}R_1,\ R_2 \mapsto R_2 - 6R_1 \text{ och } R_3 \mapsto R_3 - 3R_1,\ R_2 \mapsto \frac{1}{3}R_2,\ R_3 \mapsto R_3 - 3R_2.$$

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 1/3 & 1 \\ 6 & -2 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{varav} \qquad \begin{cases} x & = & \frac{5}{3} & + & \frac{1}{3}t \\ y & = & 0 & + & t \\ z & = & -2 & & \end{cases}.$$

L är en linje som går genom punkten $(\frac{5}{3}, 0, -2)$ med riktningsvektorn $(\frac{1}{3}, 1, 0)$.

5. Anpassa med minsta kvadratmetoden en rät linje $y = a + b \cdot t$ till följande mätdata

t	-2	-1	0	1
y	-2	1	0	3

Rita en beskrivande figur! Beräkna också medelfelet. (6p)

Lösning:

Insättning av punkternas koordinater ger oss ekvationssystemet

$$\begin{cases} a & - & 2b & = & -2 \\ a & - & b & = & 1 \\ a & + & 0b & = & 0 \\ a & + & b & = & 3 \end{cases}. \text{ På matrisform } \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}}.$$

Bästa lösningen i minsta kvadratmetodens mening erhålles ur

$$A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{y} \;\Leftrightarrow\; \hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1}A^T\mathbf{y}.$$

Vi beräknar först $A^T A$ och $A^T\mathbf{y}$.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Vi har då att

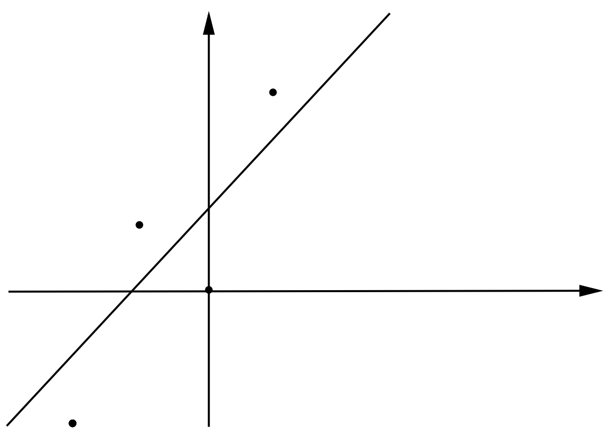
$$\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1}A^T\mathbf{y} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Alltså:$y = \dfrac{6}{5} + \dfrac{7}{5}t.$

Felvektorn: $\mathbf{f} = A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{y} =] \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{2}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$

varför medelfelet blir

$$\eta = \frac{\|\mathbf{f}\|}{\sqrt{m}} = \frac{2}{5\sqrt{4}}\sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$



VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar. (Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

(a) Ett linjärt ekvationssystem som har fler obekanta än ekvationer måste ha mer än en lösning. (1p)

Lösning:

Falskt, ty ekvationssystemet $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$ saknar lösning.

(b) Triangeln med hörn i punkterna $(1, 2, 0), (2, 3, 1)$ och $(2, 0, -2)$ har en vinkel som är större än $90°$. (1p)

Lösning:

Sant, bilda vektorerna $\mathbf{u} = (2, 3, 1) - (1, 2, 0) = (1, 1, 1)$ och $\mathbf{v} = (2, 0, 2) - (1, 2, 0) = (1, -2, -2)$.

t i sin $\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = (1, 1, 1) \bullet (1, -2, -2) = -3 < 0$. Detta innebär att $\cos\theta < 0$. vi har då att $90° < \theta < 180°$.

(c) Om $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ är $n \times n$ matriser och det$\mathbf{A} = 2$ och det$\mathbf{B} = 3$ så är $\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 5$. (1p)

Lösning:

Falskt, visas med ett motexempel.

(d) För vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^3$ så är alltid $\| \mathbf{u} \times \mathbf{v} \|^2 + \| \mathbf{u} \bullet \mathbf{v} \|^2 = \| \mathbf{u} \|^2 \| \mathbf{v} \|^2$. (1p)

Lösning:

Sant

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2+\|\mathbf{u}\bullet\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 \sin^2\theta+\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 \cos^2\theta = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta) = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2.$$

7. Bestäm en ekvation för det plan som innehåller linjen $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-4}{5}$ och punkten $(0, -1, 1)$. (4p)

Lösning:

Eftersom planet innehåller linjen vet vi att riktningsvektorn $\mathbf{v} = (2, 4, 5)$ och punkten $A = (2, 1, 4)$ ligger i planet. Vidare har vi givet att punkten $B = (0, -1, 1)$ ligger i planet. Vi bildar vektorn

$\mathbf{u} = (2, 1, 4) - (0, -1, 1) = (2, 2, 3)$ (som också ligger i planet). Vi har nu två vektorer i planet och kan därmed finna en normalvektor till planet.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_x \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - \mathbf{e}_y \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + \mathbf{e}_z \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$$
$$-2\mathbf{e}_x - 4\mathbf{e}_y + 4\mathbf{e}_z = -2(1, 2, -2).$$

En normalvektor till planet är $\mathbf{n} = (1, 2, -2)$. Insättning i planets ekvation ger

$$\mathbf{n} \bullet (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x-0 \\ y+1 \\ z-1 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 2z + 4 = 0.$$

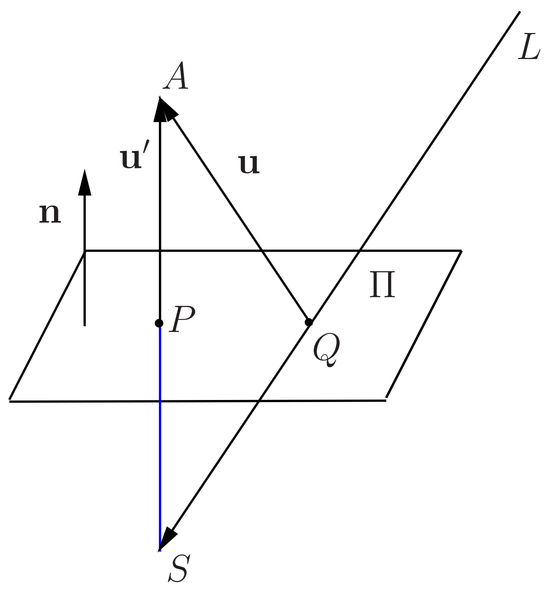
8. En ljusstråle utgår från punkten $A = (1, 2, 1)$ i en riktning som ges av vektorn $\mathbf{v} = (1, 0, 2)$ och träffar en spegel belägen i planet $x + y - z - 1 = 0$.

(a) I vilken punkt träffar ljusstrålen planet? (1p)

(b) Bestäm en ekvation för den reflekterade ljusstrålen. (3p)

Lösning:

Vi börjar med att rita en figur och inför en del beteckningar.



Vi söker först skärningspunkten Q mellan linjen L och planet Π. Linjens ekvation på parameterform

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 1 + 2t \end{cases}.$$

Insättning av (x, y, z) i planets ekvation ger att $t = 1$ vilket i sin tur ger skärningspunkten $Q = (2, 2, 3)$.

Vi bildar vektorn $\mathbf{u} = \overrightarrow{QA} = (1, 2, 1) - (2, 2, 3) = (-1, 0, -2)$.

Ortogonala projektionen $\mathbf{u}'$ av vektorn $\mathbf{u}$ på vektorn $\mathbf{n}$ ges av

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n} = \frac{(-1, 0, 2) \bullet (1, 1, -1)}{3}(1, 1, -1) = \frac{1}{3}(1, 1, -1).$$

Vi vet att sökt linje L går genom spegelpunkten S och $\overrightarrow{QS}$ är en riktningsvektor till L. Vektoraddition ger enligt figur att

$$\overrightarrow{QS} = \mathbf{u} - 2\mathbf{u}' = (-1, 0, -2) - \frac{2}{3}(1, 1, -1) = -\frac{1}{3}(5, 2, 4)$$

Vi väljer riktningsvektor $\mathbf{v} = (5, 2, 4)$ och vi vet en punkt på sökt linje, nämligen $Q =$

$(2, 2, 3)$. Linjens ekvation på parameterform blir då

$$\begin{cases} x &= 2 + 5t \\ y &= 2 + 2t \\ z &= 3 + 4t \end{cases} .$$

Lycka till!
Jonny L

Anonym kod	LMA033b och LMA515c 140313	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Beräkna determinanten $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$. (2p)

Lösning:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -0 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} =$$
$3 \cdot (-6) + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-6) = -12.$

Svar: -12. ....

(b) Bestäm inversen till matrisen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 6 & 8 & -2 \\ 2 & 5 & -2 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning:

Vi utför radoperationer enligt följande schema
$R_1 \mapsto \frac{1}{2}R_1, R_2 \mapsto R_2 - 6R_1$ och $R_3 \mapsto R_3 - 2R_1, R_2 \mapsto -R_2, R_1 \mapsto R_1 - \frac{3}{2}R_2$ och $R_3 \mapsto R_3 - 2R_2, R_2 \mapsto R_2 + R_3$ och $R_1 \mapsto R_1 - R_3$.

$$[\ \mathbf{A}|\mathbf{I}\ ] = \left[\begin{array}{cccccc} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 3/2 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 3/2 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 3/2 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & -4 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 2 & 1 \end{array}\right] =$$

$[\ \mathbf{I}|\mathbf{A^{-1}}\ ]$

Svar: $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1/2 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. ....

(c) Låt $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$. Lös matrisekvationen $\mathbf{BX} + \mathbf{X} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$. (3p)

Lösning:

$$\mathbf{BX}+\mathbf{IX} = \mathbf{A}^T \Leftrightarrow (\mathbf{B}+\mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{A}^T \Leftrightarrow \mathbf{X} = (\mathbf{B}+\mathbf{I})^{-1}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$-\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Svar: $\mathbf{X} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. ....

(d) Bestäm på parameterform, linjen L som går genom punkterna $(4, -1, 0)$ och $(2, 0, 2)$. (3p)

Lösning:

En riktningsvektor $\mathbf{v} = (2, 0, 2) - (4, -1, 0) = (-2, 1, 2)$.
$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$, där $\mathbf{r}_0 = (4, -1, 0)$. Linjen på parameterform blir då

$$\begin{cases} x &= 4 - 2t \\ y &= -1 + t \\ z &= 2 + 2t \end{cases}.$$

Svar: $\begin{cases} x &= 4 - 2t \\ y &= -1 + t \\ z &= 2 + 2t \end{cases}$ ....

(e) Bestäm alla värden på konstanten a så att vektorn $\mathbf{u} = (2, 1, 1)$ blir ortogonal mot vektorn $\mathbf{v} = (a, 1+a, 1-a)$. Beräkna sedan längden av vektor $\mathbf{u} + \mathbf{2v}$ för det erhållna värdet på konstanten a. (4p)

Lösning:

$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} a \\ 1+a \\ 1-a \end{bmatrix} = 2a + 1 + a + 1 - a = 2a + 2 = 0$ då $a = -1$. Längden fås genom
$\|\mathbf{u} + 2\mathbf{v}\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$.