1 a) $(2A+X)B^{-1} = I$

Multiplicerar vi ekvationen med B från höger, så får vi

$$2A + X = B$$

och drar ifrån 2A, vilket ger oss

$$X = B - 2A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Jacobis metod

b)

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] = [I | A^{-1}]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c)

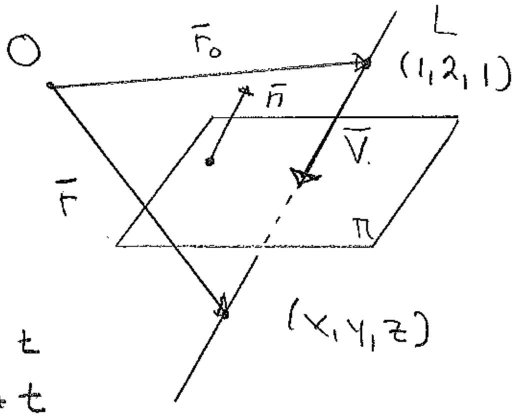
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} (-2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} (-1) =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} (2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 4 = -8$$

---

d) En riktningsvektor $\overline{v}$ är lika med normalvektorn

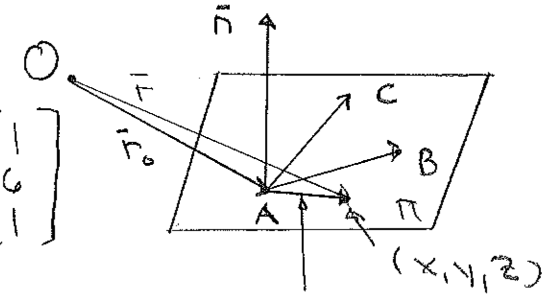
$\overline{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. $\overline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$



$$\Rightarrow \overline{r} = \overline{r}_0 + t\overline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} ; \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

---

e) Planets ekvation π: $\overline{n} \bullet (\overline{r} - \overline{r}_0) = 0$



$$\vec{AB} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} ; \vec{AC} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \overline{e}_x & \overline{e}_y & \overline{e}_z \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \overline{e}_x \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}}_{-8} - \overline{e}_y \underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{-4} + e_z \underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}}_{-16} =$$

$$= \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \\ -16 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} . \text{ Vi väljer } \overline{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Vi får då:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x - 1 \\ y + 1 \\ z - 0 \end{bmatrix} = 0 \iff \underline{2x - y + 4z - 3 = 0}$$

2 b)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -1 & 1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \tfrac{1}{2} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 & -3 & -1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} \underline{1} & 0 & 3 \\ 0 & \underline{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{Rang } A = 2$$

---

4 a)

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}_{=-5} - a\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}_{5} + 1\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{5} =$$

$$= 2\cdot(-5) - a\cdot 5 + 1\cdot 5 = -5(a+1)$$

A^{-1} existerar $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -1$.

---

b)

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} a^2+1 & a & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (a^2+1)\underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}_{-5} - a\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}_{5} + 1\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{5} =$$

$$= -5a^2 - 5 - 5a + 5 = -5a(a+1)$$

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-5a(a+1)}{-5(a+1)} = a \quad \text{för } a \neq -1.$$

c)

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} (-3) \; (-9) \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \left(-\frac{1}{5}\right) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} (-1) \; (3) \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ varav } \begin{cases} x + z = 1 \\ y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$$

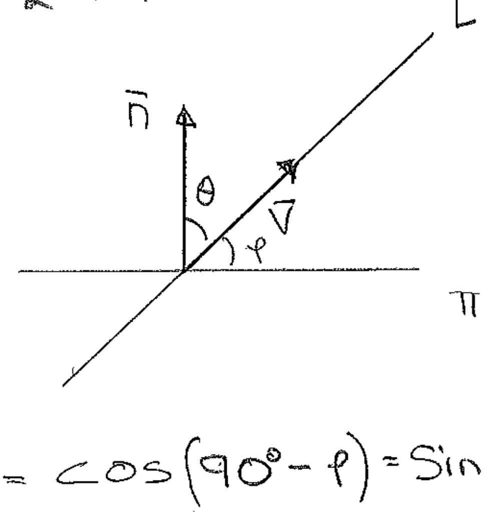
z fri variabel x och y är bundna variabler

---

5. L på parameterform: $\begin{cases} x = 4t \\ y = 1 + 4t \\ z = 2 + 7t \end{cases}$

Vinkeln mellan normalvektorn $\bar{n}$ och riktningsvektorn $\bar{v}$ är θ.

Vi söker vinkeln $\varphi = 90° - \theta$



Vi har att: $\bar{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $\bar{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$

Vi har att $\dfrac{\pm \bar{n} \cdot \bar{v}}{\|\bar{n}\|\|\bar{v}\|} = \cos\theta = \cos(90° - \varphi) = \sin\varphi$

$$\Rightarrow \varphi = \arcsin\left((\pm) \frac{(8+8-7)}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{81}} \right) = \arcsin \frac{9}{3 \cdot 9} = \underline{\underline{\arcsin \frac{1}{3}}}.$$

6. $\begin{cases} x+2y=2 \\ x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$ har matrisformen $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\bar{b}}$

Bästa lösningen i minsta kvadratmetodens mening erhålls ur

$$A^T A \hat{\bar{x}} = A^T \bar{b} \implies \hat{\bar{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \bar{b}$$

Vi beräknar $A^T A$ och $A^T \bar{b}$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{3 \cdot 6 - 4 \cdot 4} \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\implies \hat{\bar{x}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \text{ så att } \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

och felvektorn

$$\bar{f} = A\hat{\bar{x}} - \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3/2 \\ 3/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

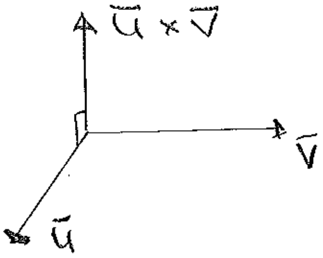
Varför medelfelet blir

$$n = \frac{\|\bar{f}\|}{\sqrt{m}} = \frac{\sqrt{0^2 + (1/2)^2 + (-1/2)^2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{\frac{2}{4}}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$(\approx 0{,}41)$

7. a) Sant.

Kryssprodukten är ju ortogonal mot de ingående vektorerna.



$\bar{u} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = 0$

---

b) Sant.

B är $(m \times n)$ då är B^T $(n \times m)$

A är $(m \times n)$ då är A^T $(n \times m)$

$$\Rightarrow \begin{cases} AB^T \text{ är } (m \times n)(n \times m) = (m \times m) & \text{definerad} \\ A^T B \text{ är } (n \times m)(m \times n) = (n \times n) & \text{definerad} \end{cases}$$

---

c) Falskt. Motexempel. Tag $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$, $\det B = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1$

$\Rightarrow \det A + \det B = -1 - 1 = -2$

$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A+B) = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 15 = -3$

<u>Alltså:</u> $\det(A+B) \neq \det A + \det B$

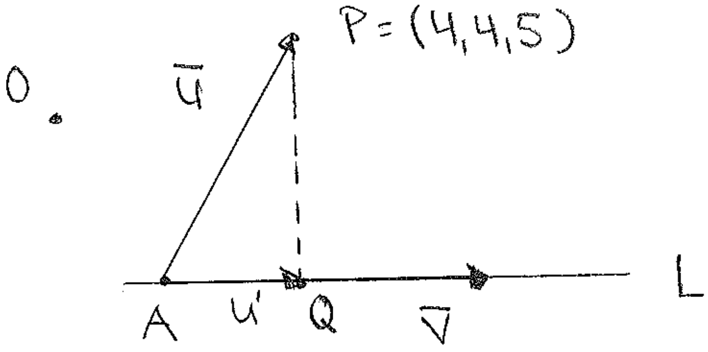
---

d) Falskt

$VL = (A+B)(A-B) = A \cdot A - AB + BA - B \cdot B$

vilket är lika med HL om och endast om $BA = AB$, vilket inte är sant (bara om A och B kommuterar).

8.



Tag en punkt $A \in L$

t.ex. $A = (2,3,4)$

$$\Rightarrow \bar{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

en riktningsvektor $\bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\bar{u}'$ är ortogonala projektionen av vektorn $\bar{u}$ på vektorn $\bar{v}$. Projektionsformeln ger

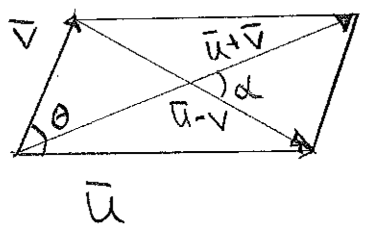
$$\bar{u}' = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\|\bar{v}\|^2} \bar{v} = \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}{\sqrt{9}^{\,2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{6}{9} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vektoraddition ger

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + u' = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/3 \\ 13/3 \\ 16/3 \end{bmatrix}$$

<u>Svar:</u> Projektionspunkten $Q = \frac{1}{3}(8,13,16)$

9. $\|\bar{u}\| = 4$ α sökes!



Parallellogramens omkrets

$$P = 2\|\bar{u}\| + 2\|\bar{v}\| = 12$$

$$\Leftrightarrow \|\bar{v}\| = 2$$

Vi antar att vinkeln mellan $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är θ

Vi vet att parallellogramens area är $6\,cm^2$.

$$\Rightarrow T = \|\bar{u} \times \bar{v}\| = \underbrace{\|\bar{u}\|}_{=4}\underbrace{\|\bar{v}\|}_{=2} \sin\theta = 6$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Med figurens beteckningar blir diagonalerna $\bar{u}+\bar{v}$ och $\bar{u}-\bar{v}$ och vi får att

$$\pm(\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}-\bar{v}) = \|\bar{u}+\bar{v}\|\|\bar{u}-\bar{v}\| \cos\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = \arccos \pm \frac{(\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}-\bar{v})}{\|\bar{u}+\bar{v}\|\|\bar{u}-\bar{v}\|}$$

Vi behöver veta $(\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}-\bar{v})$, $\|\bar{u}+\bar{v}\|$ och $\|\bar{u}-\bar{v}\|$

$$(\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}-\bar{v}) = \|\bar{u}\|^2 \underbrace{-\bar{u}\cdot\bar{v} + \bar{v}\cdot\bar{u}}_{=0} - \|\bar{v}\|^2 = 16 - 4 = 12$$

$$\|\bar{u}+\bar{v}\|^2 = (\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}+\bar{v}) = \|\bar{u}\|^2 + 2\bar{u}\cdot\bar{v} + \|\bar{v}\|^2$$

$$= \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 + 2\|\bar{u}\|\|\bar{v}\|\cos\theta =$$

$$= 16 + 4 + 2\cdot 4\cdot 2\cos\theta =$$

$$= 20 + 16\cos\theta$$

$$= 4(5 + 4\cos\theta)$$

9. $\|\bar{u}-\bar{v}\|^2 = (\bar{u}-\bar{v})\cdot(\bar{u}-\bar{v}) = \|\bar{u}\|^2 - 2\bar{u}\cdot\bar{v} + \|\bar{v}\|^2$

$$= \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 - 2\|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\|\cos\theta$$

$$= 4(5-4\cos\theta)$$

Vi har då att

$$\|\bar{u}+\bar{v}\|\,\|\bar{u}-\bar{v}\| = \sqrt{4(5+4\cos\theta)4(5-\cos\theta)} =$$

$$= 4\sqrt{25-16\cos^2\theta} = 4\sqrt{25-16(1-\sin^2\theta)} =$$

$$= \left\{ \text{Vet sedan tidigare att } \sin\theta = \frac{3}{4} \right\} =$$

$$= 4\sqrt{25-16\left(1-\frac{9}{16}\right)} = 4\sqrt{25-16+9} = 4\sqrt{18} = \underline{12\sqrt{2}}$$

Nu kan vi beräkna α

$$\alpha = \arccos\frac{12}{12\sqrt{2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$$