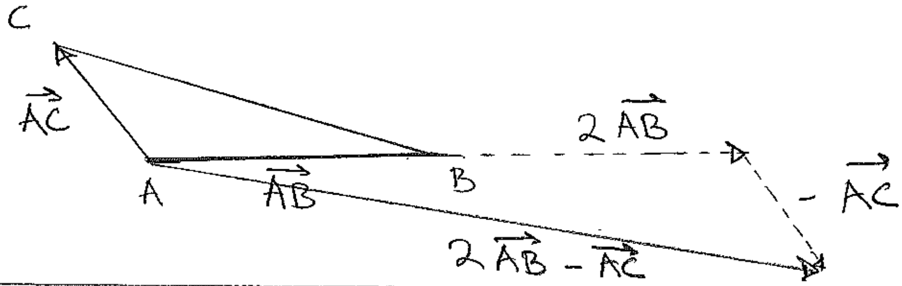
1. a)



b)
$$[A|I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\-1&3&2&0&1&0\\3&2&2&0&0&1\end{array}\right]\begin{matrix}1 & -3\end{matrix}\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&4&3&1&1&0\\0&-1&-1&-3&0&1\end{array}\right]\begin{matrix}-1\end{matrix}\sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&1&3&0&-1\\0&4&3&1&1&0\end{array}\right]\begin{matrix}-1 & -4\end{matrix}\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2&0&1\\0&1&1&3&0&-1\\0&0&-1&-11&1&4\end{array}\right]\begin{matrix}1 & -1\end{matrix}\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2&0&1\\0&1&0&-8&1&3\\0&0&1&11&-1&-4\end{array}\right]=\left[I\,|\,A^{-1}\right]$$

<u>Svar:</u> $A^{-1}=\begin{bmatrix}-2&0&1\\-8&1&3\\11&-1&-4\end{bmatrix}$

c) $(\bar{e}_x+2\bar{e}_z)\times(3\bar{e}_x+4\bar{e}_z)=$

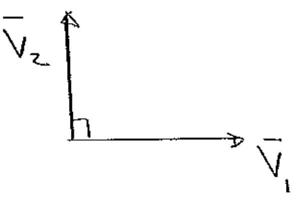
$$=3\underbrace{\bar{e}_x\times\bar{e}_x}_{\bar{0}}+4\bar{e}_x\times\bar{e}_z+6\bar{e}_z\times\bar{e}_x+8\underbrace{\bar{e}_z\times\bar{e}_z}_{\bar{0}}$$

$$=4\bar{e}_x\times\bar{e}_z-6\bar{e}_x\times\bar{e}_z=$$

$$=-2\bar{e}_x\times\bar{e}_z=2\bar{e}_z\times\bar{e}_x=2\bar{e}_y$$

d) $\bar{V}_1 = \begin{bmatrix}3\\2\\-1\end{bmatrix}, \quad \bar{V}_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$

$$\bar{V}_1 \cdot \bar{V}_2 = \begin{bmatrix}3\\2\\-1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} = 3\cdot 1 + 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 = 0$$



$\Rightarrow \cos\theta = 0 \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$.

---

e) $$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} (-4) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -5 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \text{Utveckla efter kolonn 3} =$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}}_{\text{Teckenhjälp}} = -1 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & -5 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} (-3) = - \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & -5 & -3 \\ -8 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \text{Utveckla efter rad 3} = \underbrace{\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}}_{\text{Teckenhjälp}} = -(-8) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 8(-3\cdot 1 - (-5)\cdot 1) = 8 \cdot 2 = \underline{\underline{16}}$$

2. b) $AXB - 2C = XB$

$\Leftrightarrow$

$AXB - XB = 2C$

$\Leftrightarrow$

$AXB - IXB = 2C$

$\Leftrightarrow$

$(A-I)XB = 2C$

$\Leftrightarrow$

$(A-I)X\underbrace{BB^{-1}}_{I} = 2CB^{-1}$; B^{-1} måste existera

$\Leftrightarrow$

$(A-I)X = 2CB^{-1}$

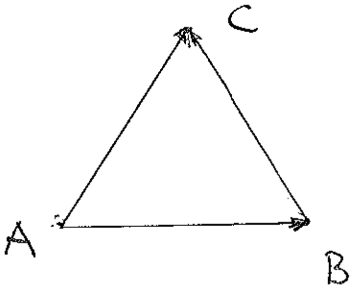
$\Leftrightarrow$

$\underbrace{(A-I)^{-1}(A-I)}_{I}X = (A-I)^{-1}2CB^{-1}$; $(A-I)^{-1}$ måste existera

$\Leftrightarrow$

$X = (A-I)^{-1}2CB^{-1}$

3. b)



$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \bar{e}_x - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \bar{e}_y + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \bar{e}_z$$

$$= 0\,\bar{e}_x + 4\,\bar{e}_y - 2\,\bar{e}_z = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Arean blir då:

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \left\| 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{0^2 + 2^2 + (-1)^2} =$$

$$= \sqrt{5} \text{ a.e.}$$

4 b)

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & x & 4 \\ 2 & 2 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & x+6 & x+8 \\ 5 & 6 & 2x+2 \\ 3 & x+2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & x & 4 \\ 2 & 2 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 5 \\ x+8 & 6 & 2x+2 \\ x+6 & x+2 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriserna A och B kommuterar om och endast om

$$AB = BA$$

d.v.s. (i vårt fall

$$\begin{bmatrix} 6 & x+6 & x+8 \\ 5 & 6 & 2x+2 \\ 3 & x+2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 5 \\ x+8 & 6 & 2x+2 \\ x+6 & x+2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

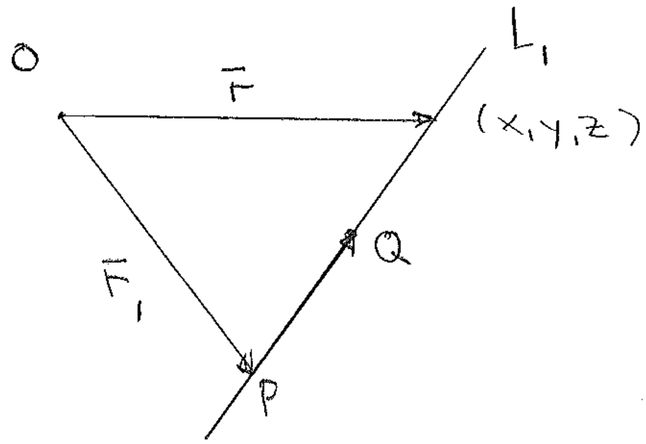
$$(x+6=3) \wedge (x+8=5)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{x = -3}}$$

5. Vi bestämmer först L_1 på parameterform.

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix}2\\0\\9\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4\\4\\5\end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}$$



En riktningsvektor är

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix}$$

Linjens ekvation (L_1)

$$\bar{r} = \bar{r}_1 + s\bar{v}_1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\4\\5\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + s \\ y = 4 + 2s \\ z = 5 - 2s \end{cases}$$

L_2 på parameterform
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$$

Skärningspunkt fås (om det finns) genom att lösa ES

$$\begin{cases} 2+t = 4+s \\ 3+2t = 4+2s \\ 4+2t = 5-2s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - s = 2 \\ 2t - 2s = 1 \\ 2t + 2s = 1 \end{cases}$$
med totalmatrisen

$$M = \begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\2 & -2 & 1\\2 & 2 & 1\end{bmatrix} \boxed{-2} \sim \begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\0 & 0 & -3\\0 & 4 & -3\end{bmatrix}$$

ES saknar lösning, ty pivotelementet står sist i rad 2.

6. Insättning av punkternas koordinater ger oss ES

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ \quad\quad b = 0 \\ a + b = 1 \\ 4a + b = 3 \end{cases}$$

På matrisform $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\bar{b}}$

Bästa lösningen i minsta kvadratmetodens mening erhålles ur

$$A^T A \hat{\bar{x}} = A^T \bar{b} \iff \hat{\bar{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \bar{b}$$

Vi beräknar $A^T A$ och $A^T b$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^T A)^{-1} = \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 18 \end{bmatrix}$$

$$A^T \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{\bar{x}} = \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 26 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 13 \\ 3 \end{bmatrix}$$

<u>felvektorn</u> $\quad \bar{f} = A\hat{\bar{x}} - \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13/18 \\ 3/18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \dots = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Varför medelfelet blir

$$n = \frac{\|\bar{f}\|}{\sqrt{m}} = \frac{1}{\sqrt{4}} \cdot \frac{1}{18} \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-2)^2 + 1^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{18} \cdot \sqrt{18} = \frac{\sqrt{18}}{36}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{12} \approx 0{,}12$$

<u>Svar:</u> $y = \frac{13}{18} x^2 + \frac{1}{6}$; $n = \frac{\sqrt{2}}{12}$ $(\approx 0{,}12)$

7.

a) Att skalärprodukten är noll medför att vinkeln mellan $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är rät. Vi får

$$(\bar{u} \times \bar{v}) \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = \|\bar{u} \times \bar{v}\|^2 = \left(\|\bar{u}\| \|\bar{v}\| \sin\frac{\pi}{2}\right)^2 =$$

$$= \|\bar{u}\|^2 \|\bar{v}\|^2.$$

SANT

b) FALSKT

$$(ES) \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$ har entydiga lösningen $x = y = 1$.

c) Bilda vektorerna $\bar{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

$$\cos\theta = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{\|\bar{u}\| \|\bar{v}\|}$$

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = 2 + 1 - 3 = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$ SANT

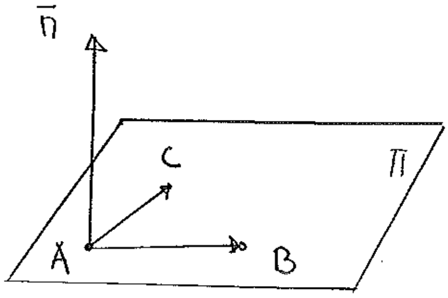
d) FALSKT. Tag $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$AB \neq BA$.

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

8.a) <u>Planets ekvation</u>



$$\pi: \ \bar{n} \cdot (\bar{r} - \bar{r}_0) = 0$$

<u>En normalvektor till π</u>

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \times \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}_{=4} \bar{e}_x - \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}_{=8} \bar{e}_y + \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}_{=-1} \bar{e}_z$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

<u>Insättning i planets ekvation ger</u>

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x-1 \\ y-0 \\ z-1 \end{bmatrix} =$$

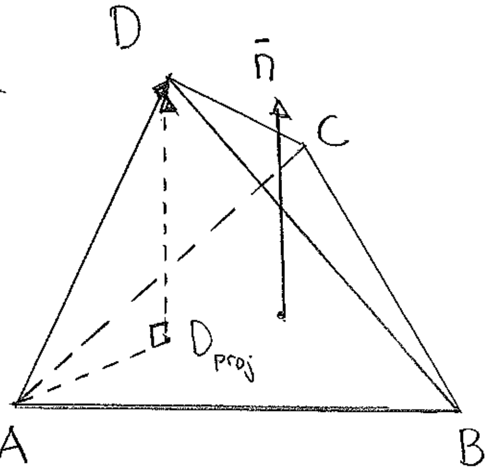
$$= 4(x-1) - 8(y-0) - 1(z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{4x - 8y - z - 3 = 0}}$$

8 b) Punkten $A=(1,0,1)$ ligger i planet.

$$\overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$



Vektorn $\overrightarrow{DD}$ är ortogonala projektionen av vektorn $\overrightarrow{AD}$ på vektorn $\bar{n}$ (normalvektor till π)

Projektionsformeln ger

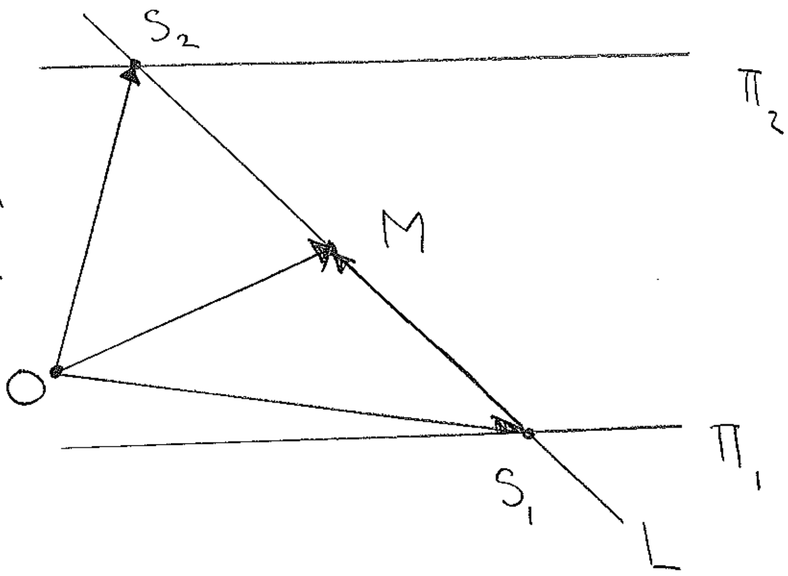
$$\overrightarrow{DD_{Proj}} = \frac{\overrightarrow{AD} \cdot \bar{n}}{\|\bar{n}\|^2} \cdot \bar{n} = \frac{\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ -1 \end{bmatrix}}{81} (4,-8,-1) =$$

$$= \frac{-27}{81} (4,-8,-1) = -\frac{1}{3} (4,-8,-1)$$

höjden i tetraedern blir då

$$\|\overrightarrow{DD_{proj}}\| = \frac{1}{3}\sqrt{4^2+(-8)^2+(-1)^2} = 3 \text{ l.e.}$$

9. Antag att skärningspunkterna för linjen L med planen Π_1 resp. Π_2 är S_1 resp. S_2.



Då gäller att

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OS_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{S_1S_2} = \overrightarrow{OS_1} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OS_2} - \overrightarrow{OS_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OS_1} + \overrightarrow{OS_2}\right)$$

Vi behöver nu bestämma punkterna S_1 och S_2, vilka är skärningspunkterna mellan linjen L och planen Π_1 och Π_2.

$$L: \begin{cases} x = 0 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \qquad \Pi_1: 2x + y - 2z - 7 = 0 \qquad \Pi_2: x + \frac{1}{2}y - z - \frac{3}{2} = 0$$

Insättning av L i Π_1 ger $t = -11$

$\Rightarrow S_1 = (x_1, y_1, z_1) = (0-11, 2-11, 3-2\cdot 11) = (-11, -9, -19)$

Insättning av L i Π_2 ger $t = -7$

$\Rightarrow S_2 = (x_2, y_2, z_2) = (0-7, 2-7, 3-2\cdot 7) = (-7, -5, -11)$

Vi får då:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left((-11, -9, -19) + (-7, -5, -11)\right) = (-9, -7, -15)$$

Svar: Sökt koordinat $M = (-9, -7, -15)$