5. a)

$$M = [A \ \ b] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & a & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & a-2 & -3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a-2 & -4 \end{bmatrix} \overset{a \neq 2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{a-2} \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4a-4}{a-2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{a-2} \end{bmatrix}$$

Fall I. $a \neq 2$

(Precis en lösning)

$$\begin{cases} x = \dfrac{4a-2}{a-2} \\ y = -1 \\ z = -\dfrac{4}{a-2} \end{cases}$$

Fall II $a = 2$

(Es saknar lösning)

$$M \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a-2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

---

b) $$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a-2 \end{vmatrix} = a-2$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a \end{vmatrix} = \dots = 2-a$$

$$\Rightarrow y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{2-a}{a-2} = \frac{-(a-2)}{a-2} = -1 \quad ; \ a \neq 2$$

5. c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

$$A^Tb = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$A^TAx = A^Tb$$

Vi vet att $\det(A^TA) \neq 0 \iff (A^TA)^{-1}$ existerar

och har den entydiga lösningen $x = (A^TA)^{-1}(A^Tb)$

Om $\det(A^TA) = 0$ har ES oändligt många lösningar

$\iff$

$$M = \left[A^TA \mid A^Tb\right] = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 6 & 11 \\ 5 & 6 & 5 & 10 \\ 6 & 5 & 6 & 11 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{16}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Varav $\begin{cases} x + z = \frac{16}{11} \\ y = \frac{5}{11} \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{16}{11} - t \\ y = \frac{5}{11} \\ z = t \end{cases}$

$$f = Ax - b = \begin{bmatrix} x + y + z - 3 \\ x + 2y + z - 2 \\ 2x + y + 2z - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{11} - t + \frac{5}{11} + t - \frac{33}{11} \\ \frac{16}{11} - t + \frac{10}{11} + t - \frac{22}{11} \\ \frac{32}{11} - 2t + \frac{5}{11} + 2t - \frac{33}{11} \end{bmatrix} = \frac{4}{11}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Varför medelfelet blir

$$\eta = \frac{|f|}{\sqrt{m}} = \frac{4}{11} \cdot \frac{\sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 1^2}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{11}}{11\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{33}} \approx 0{,}7$$