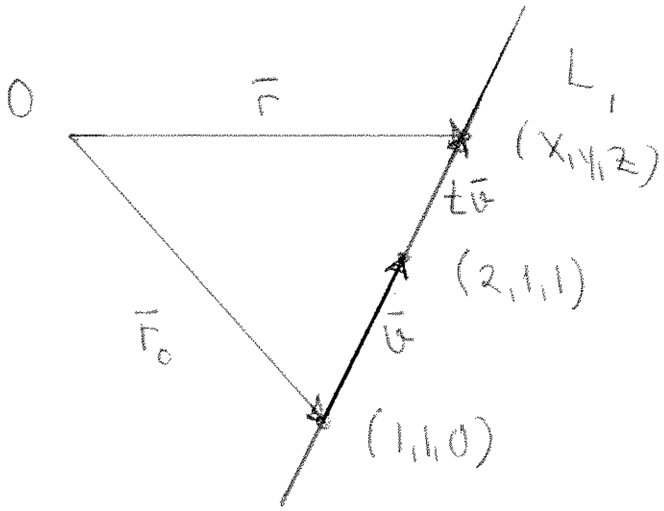
1. a) Vektoraddition



$\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{v}_1$; där

$\bar{v}_1 = \langle 2-1, 1-1, 1-0 \rangle = \langle 1,0,1 \rangle$

och

$\bar{r}_0 = \langle 1,1,0 \rangle$

$\Rightarrow \bar{r} = \langle 1,1,0 \rangle + t \langle 1,0,1 \rangle$

På parameterform

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$$

En riktningsvektor till L_2 är en vektor $\bar{v}_2$ som uppfyller att $\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = 0$

Tag tex $\bar{v}_2 = \langle -1, 1, 1 \rangle$

$\Rightarrow \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = \langle 1,0,1 \rangle \cdot \langle -1,1,1 \rangle = -1 + 0 + 1 = 0$

$\Rightarrow \bar{v}_2 \perp \bar{v}_1$

Tag en godtycklig punkt (x_0, y_0, z_0)
(som <u>ej</u> ligger på L_1)

t.ex. $(1,0,2)$

$$\Rightarrow L_2 : \begin{cases} x = 1 - s \\ y = 0 + s \\ z = 2 + s \end{cases}$$

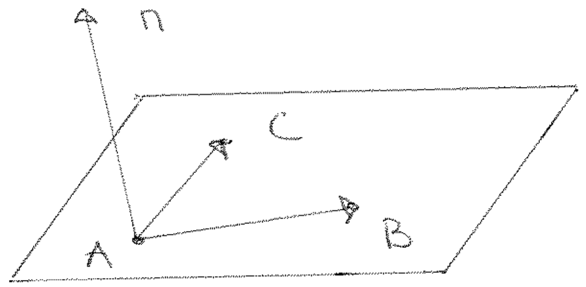
b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-5) = 5$

---

c) $A = (1,2,1)$ $B = (-1,3,3)$

$C = (2,4,3)$



$\vec{AB} = \langle -2, 1, 2 \rangle$

$\vec{AC} = \langle 1, 2, 2 \rangle$

en normalvektor till planet fås genom

$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \bar{k} =$

$= -2\bar{i} + 6\bar{j} - 5\bar{k} = \langle -2, 6, -5 \rangle = \bar{n}$

Insättning i planets ekvation ger

$n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) + n_z(z - z_0) = 0$

$\Rightarrow -2(x-1) + 6(y-2) - 5(z-1) = 0$

$\Leftrightarrow$

$-2x + 6y - 5z - 5 = 0 \Leftrightarrow 2x - 6y + 5z + 5 = 0$

d) $\bar{a} \cdot \bar{b} = 3 \quad \bar{a} \times \bar{b} = \langle 1, -1, 1 \rangle$

Vi har följande samband

$$\begin{cases} \bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}| \cos\theta \\ |\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}| \sin\theta \end{cases} ; \text{ där } |\bar{a} \times \bar{b}| = \sqrt{3}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} |\bar{a}||\bar{b}| = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\cos\theta} \\ |\bar{a}||\bar{b}| = \dfrac{|\bar{a} \times \bar{b}|}{\sin\theta} \end{cases} \Rightarrow \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\cos\theta} = \frac{|\bar{a} \times \bar{b}|}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{|\bar{a} \times \bar{b}|}{\bar{a} \cdot \bar{b}}$$

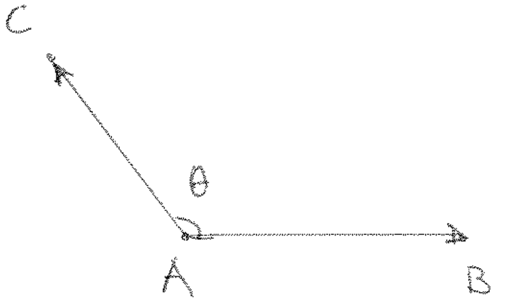
och vi har att

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\underline{\underline{\theta = \frac{\pi}{6}}}$$

2 b) $\vec{AB} = \langle 1,1,2 \rangle$

$\vec{AC} = \langle 2,1,a-1 \rangle$



θ trubbig om $\vec{AB} \cdot \vec{AC} < 0$

$\Rightarrow \langle 1,1,2 \rangle \cdot \langle 2,1,a-1 \rangle = 2+1+2a-2 < 0$

$\Leftrightarrow 2a+1 < 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{a < -\frac{1}{2}}}$

---

3 b) Insättning av mätvärdena i $y = a + bt$ ger

$$\begin{cases} a - 2b = -1 \\ a - b = 1 \\ a - 0b = 0 \\ a + 2b = 3 \end{cases} \quad \text{På matrisform} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

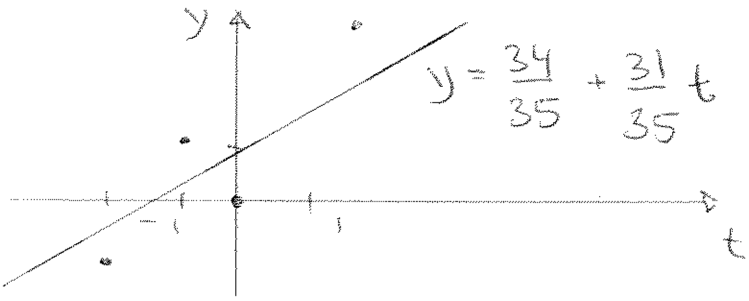
Minstakvadratlösning: $A^T A \hat{x} = A^T \bar{y}$ (*)

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{35} \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \; ; \; A^T \bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T \bar{y} = \frac{1}{35} \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{35} \begin{bmatrix} 34 \\ 31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34/35 \\ 31/35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow y = \frac{34}{35} + \frac{31}{35} t$$



4 a)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 1 & 2/3 & +1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{3\cdot 3 - 2\cdot 4}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

b) $AXB = C \Leftrightarrow XB = A^{-1}C \Leftrightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}.$$

c) Sats säger A^{-1} existerar $\Leftrightarrow$ kolonnvektorerna i A är linjärt oberoende.

5. Totalmatris

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & a \\ 1 & 1-a & 2 & 0 \\ 2 & 2-a & a^2 & 2a-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & -a & 0 & -a \\ 0 & -a & a^2-4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{a \neq 0}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -a & a^2-4 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a-2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\underset{a \neq \pm 2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & a-1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+2} \end{bmatrix}$$

Om $a \neq 0$; $a \neq 2$; $a \neq -2$ har vi lösningen

$$\begin{cases} x = \dfrac{a^2+a-4}{a+2} \\ y = 1 \\ z = \dfrac{1}{a+2} \end{cases}$$

5. om $a=0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$: $\cancel{x_1}$, $\cancel{x_3}$ bundna variabler

$\cancel{x_3}$ fri variabel

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1-t \\ y = t \\ z = 1/2 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

om $a=2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ x, y bundna

z fri

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1-2s \\ y = 1 \\ z = s \end{cases} \qquad s \in \mathbb{R}$$

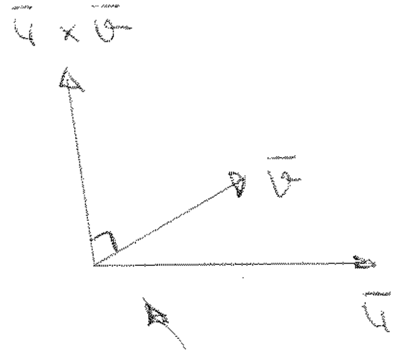
om $a=-2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

och vi ser att lösning saknas, pivotelementet står sist i raden.

6. a) Sant

$\bar{u} \times \bar{v}$ är en vektor som är ortogonal mot både $\bar{u}$ och $\bar{v}$.



<u>Sats:</u>

$$(\bar{u} \times \bar{v}) \cdot \bar{v} = |\bar{u} \times \bar{v}||\bar{v}| \cos\theta = |\bar{u} \times \bar{v}||\bar{v}| \cos\frac{\pi}{2}$$

$$= 0$$

---

b) Falskt

Vi kan visa att nollvektorn inte avbildas på nollvektorn, villket varje linjär avbildning gör.

$$T(0,0) = (0,2,0) \neq \bar{0}.$$

---

c) Falskt

$$AB = C$$

$$(m \times n)(n \times p) = (3 \times p)$$

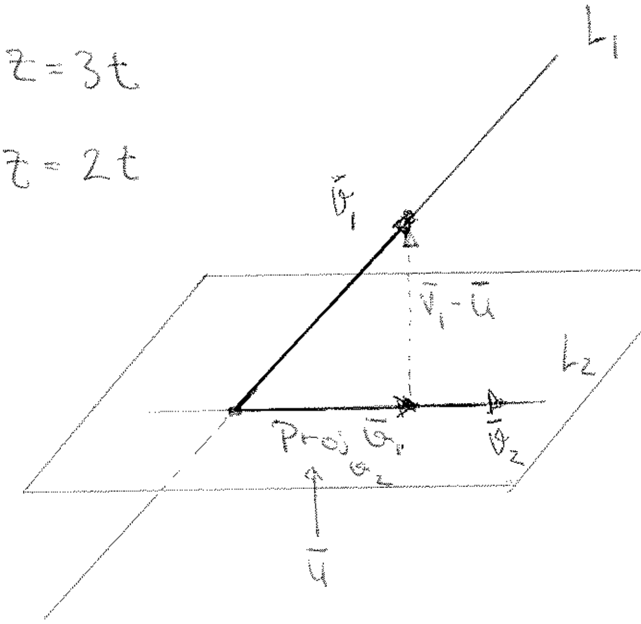
Det är A som måste ha 3 rader.

7. L_1: $x = -t \quad y = 2t \quad z = 3t$

L_2: $x = -t \quad y = -t \quad z = 2t$

Vi ser att båda linjerna går genom origo

=> Planet går genom origo.



Projektionssatsen ger

$$\text{Proj}_{\bar{v}_2} \bar{v}_1 = \bar{u} = \frac{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2}{|\bar{v}_2|^2}\, \bar{v}_2 = \frac{\langle -1,2,3\rangle \cdot \langle -1,-1,2\rangle}{6} \langle -1,-1,2\rangle$$

$$= \frac{5}{6} \langle -1,-1,2\rangle$$

Vektorn $\bar{v}_1 - \bar{u}$ är vinkelrät mot planet och är därmed en normalvektor till planet.

$$\bar{v}_1 - \bar{u} = \langle -1,2,3\rangle - \frac{5}{6}\langle -1,-1,2\rangle = \frac{1}{6}\langle -1,17,8\rangle$$

Välj: $\bar{n} = \langle -1,17,8\rangle$

en punkt i planet $(0,0,0)$

Planets ekvation

$$-1(x-0) + 17(y-0) + 8(z-0) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x - 17y + 8z = 0$$

8. a) $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$F(\bar{x}) = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix}}_{2\times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} & A & \end{bmatrix}}_{2\times 3} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{3\times 1} = \left\{ \begin{matrix} \text{Vi identifierar} \\ A \end{matrix} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad ; \; A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$G: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$G(\bar{x}) = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}}_{3\times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} & B & \end{bmatrix}}_{3\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{2\times 1} = \left\{ \begin{matrix} \text{Vi identifierar} \\ B \end{matrix} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad ; \; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow F \circ G = AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G \circ F = BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

b) $\det AB = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\det BA = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0 =$$

$$= -1 + 1 = 0$$

$\Rightarrow$ Varken $F \circ G$ eller $G \circ F$ är inverterbara.