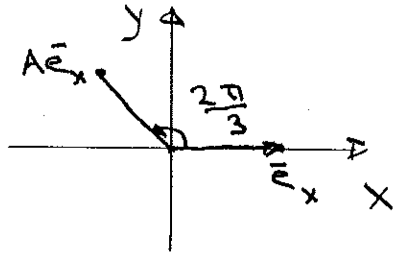
Ex.1

Vridning $\frac{2\pi}{3}$ moturs innebär att

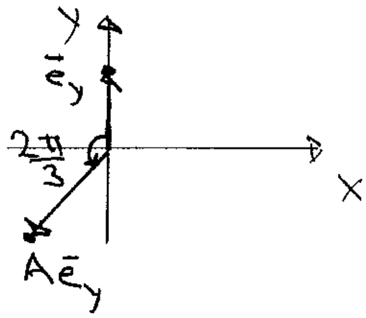
a) basvektorerna $\bar{e}_x$ och $\bar{e}_y$ vrides till

$$A\bar{e}_x = \begin{bmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} \\ \sin\frac{2\pi}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$



och

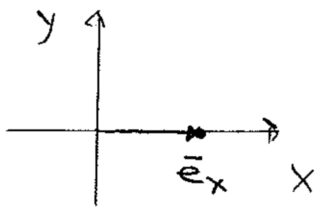
$$A\bar{e}_y = \begin{bmatrix} \cos\frac{7\pi}{6} \\ \sin\frac{7\pi}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\frac{2\pi}{3} \\ \cos\frac{2\pi}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$



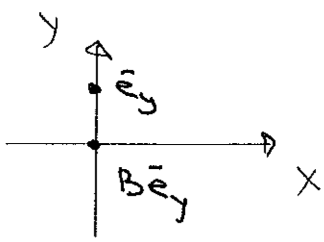
Avbildningen F får matrisen $A = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$

Ortogonala projektionen av $\bar{e}_x$ och $\bar{e}_y$ på x-axeln ger

$$B\bar{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ och}$$



$$B\bar{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



b) Den sammansatta avbildningen som först projicerar och sedan vrider ges av matrisen

$$A\cdot B = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Ex 2 $\begin{bmatrix} \bar{u} & \bar{v} & \bar{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 2a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & 2a-1 \end{bmatrix}$

Från detta ser vi att $\bar{w} \in \text{Span}\{\bar{u}\ \bar{v}\}$ om och endast om $2a-1=0$ d.v.s. $\underline{\underline{a=1/2}}$

För $a=1/2$

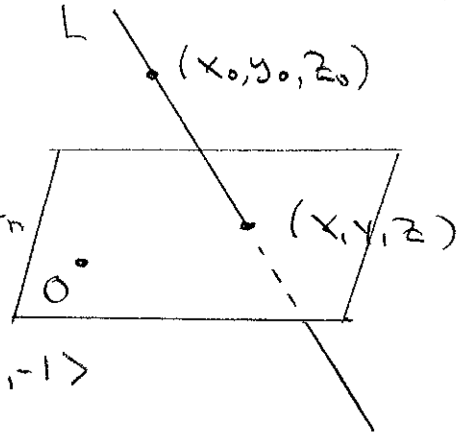
$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$x_2 = -1, \quad x_1 = 1 - \frac{1}{2}x_2 = 1 - \frac{1}{2}(-1) = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \frac{3}{2}\bar{u} + (-1)\bar{v} = \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \bar{w}$

ÖB

EX.1 Bestäm matrisen för den linjära avbildning som svarar mot projektionen på planet $x+y+z=0$ i riktning $(1,1,-1)$.



Lsg/ Tag en punkt (x_0, y_0, z_0) på en linje med riktningsvektorn $\bar{v}$.

Eftersom $\bar{n} = \langle 1,1,1 \rangle$ och $\bar{v} = \langle 1,1,-1 \rangle$ är det ej ortogonal projektion

Bilden av punkten (x_0, y_0, z_0) bestäms genom att vi ser efter var linjen

$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 + t \\ z = z_0 - t \end{cases}$$ skär planet

$\Rightarrow$ $x_0 + t + y_0 + t + z_0 - t = 0$ ger $t = -(x_0 + y_0 + z_0)$

Bilden av punkten blir därför

$$\begin{cases} x = x_0 - (x_0 + y_0 + z_0) = -y_0 - z_0 \\ y = y_0 - (x_0 + y_0 + z_0) = -x_0 - z_0 \\ z = z_0 + (x_0 + y_0 + z_0) = x_0 + y_0 + z_0 \end{cases} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}}_{\bar{x}}$$

Vilket svarar mot avbildningsmatrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$