EX. 1

Insättning av punkternas koordinater ger oss ES

$$\begin{cases} a - 2b = -2 \\ a - b = 1 \\ a + 0b = 0 \\ a + b = 3 \end{cases}$$

. På matrisform
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Bästa lösning i minstakvadratmetodens mening erhålles ur

$$A^T A \hat{\bar{x}} = A^T \bar{y} \iff \hat{\bar{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \bar{y} \quad \left(\text{om } (A^T A)^{-1} \text{ existerar} \right)$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

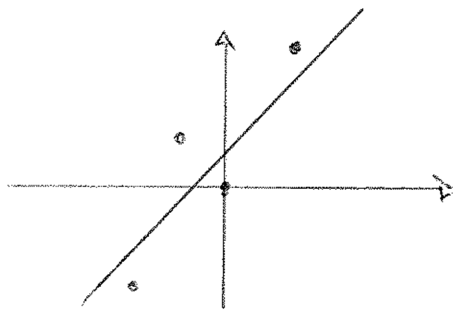
$$\Rightarrow \hat{\bar{x}} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} : \quad \underline{\underline{y = \frac{6}{5} + \frac{7}{5} t}}$$

<u>Felvektorn:</u> $\bar{f} = A\hat{\bar{x}} - \bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6/5 \\ 7/5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{2}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$

<u>Varför medelfelet blir</u>

$$\eta = \frac{|\bar{f}|}{\sqrt{m}} = \frac{2}{5\sqrt{4}} \sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-3)^2 + (-1)^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5}$$



EX. 2

B. $\begin{cases} x+2y=2 \\ x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$ har matrisformen $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\bar{b}}$

Bästa lösningen i minsta kvadratmetodens mening erhålls ur

$$A^T A \hat{\bar{x}} = A^T \bar{b} \Rightarrow \hat{\bar{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \bar{b}$$

Vi beräknar $A^T A$ och $A^T \bar{b}$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{3 \cdot 6 - 4 \cdot 4} \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{\bar{x}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \text{ så att } \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

och felvektorn

$$\bar{f} = A\hat{\bar{x}} - \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3/2 \\ 3/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

Varför medelfelet blir

$$n = \frac{\|\bar{f}\|}{\sqrt{m}} = \frac{\sqrt{0^2 + (1/2)^2 + (-1/2)^2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{\frac{2}{4}}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$(\approx 0{,}41)$