MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen

Hjälpmedel: inga
Datum: 141030 kl. 14.00–18.00
Telefonvakt: Tomas Wernstål
772 3557

LMA033b och lma515c

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
För godkänt på tentan krävs 23 poäng på tentamens första del (godkäntdelen). Bonuspoäng från duggor 2014 räknas med. För betyg 4 resp. 5 krävs dessutom 33 resp. 43 poäng sammanlagt på tentamens två delar, varav minst 4 resp. 6 poäng på del 2.
Lösningar läggs ut på kursens hemsida. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Del 1: Godkäntdelen

1. Denna uppgift finns på separat blad på vilket lösningar och svar skall skrivas. Detta blad inlämnas tillsammans med övriga lösningar. (14p)

2. (a) Formulera och bevisa projektionssatsen. Rita figur! (4p)

(b) Antag att punkterna $A = (1, 1, 2)$, $B = (2, 1, 3)$ och $C = (2, 2, 1)$ är givna i ett ONH-system. Beräkna projektionen av vektorn $\overrightarrow{AB}$ på vektorn $\overrightarrow{AC}$. (2p)

(c) Beräkna vinkeln mellan vektorerna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AC}$. (2p)

(d) Beräkna arean av den triangel som har hörn i punkterna $A = (1, 1, 2)$, $B = (2, 1, 3)$ och $C = (2, 2, 1)$. (2p)

3. (a) Definera vad som menas med en minstakvadratlösning till en ekvation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (2p)

(b) Bestäm minstakvadratlösningen till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ då $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. (3p)

4. (a) Bestäm skalären p i matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 9 & p \end{bmatrix}$$

så att ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har icke-trivial lösning. (3p)

(b) Låt $p = 0$ i matrisen A. Lös med hjälp av Cramers regel x_3 ur ekvationssystemet (3p)

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

5. Låt $\mathbf{u}=\langle 1, 1, 2\rangle$, $\mathbf{v}=\langle -2, 1, 3\rangle$ och $\mathbf{w}=\langle -1, 2, 1\rangle$ vara tre vektorer i $\mathbb{R}^3$. Avgör vilken/vilka av följande operationer som är väldefinerade (3p)

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \times \mathbf{w} \qquad (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \qquad (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}.$$

Beräkna det/de uttryck som är korrekt/korrekta.

VÄND!

Del 2: Överbetygsdelen

I allmänhet kan inte poäng på dessa uppgifter räknas in för att nå godkäntgränsen.

6. Avgör om följande påståenden är sanna eller falska, samt motivera ditt svar. (Rätt svar utan motivering ger inga poäng.)

(a) Om A är en 3×3 matris så är $\det 2A = 2 \det A$ (1p)

(b) Om$AB = C$ och C har två kolonner, så måste A också ha två kolonner. (1p)

(c) Om två vektorer är vinkelräta mot varandra så måste deras vektorprodukt vara nollvektorn. (1p)

(d) Alla ekvationssystem med färre ekvationer än obekanta har parameterlösning. (1p)

7. För vilka värden på a är vektorerna

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ a \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 0 \\ a \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ a \\ 0 \end{bmatrix}$$

linjärt beroende? (4p)

8. Betrakta två avbildningar F och G från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$. Avbildningen F innebär en spegling i $x-$ axeln medan G betyder en vridning $\frac{\pi}{4}$ moturs.

(a) Bestäm matrisen för den sammansatta avbildningen som fås om man först projicerar och sedan vrider. (3p)

(b) Får man samma resultat(som i uppgift a)) om man först vrider och sedan speglar, d.v.s. är de båda sammansatta avbildningarna kommutativa? (1p)

Lycka till!
Jonny L

Anonym kod	LMA033b och lma515c 141030	sid.nummer 1	Poäng

1. Till nedanstående uppgifter skall korta lösningar redovisas, samt svar anges, på anvisad plats (endast lösningar och svar på detta blad, och på anvisad plats, beaktas).

(a) Bestäm på parameterform, linjen L_1 som går genom punkterna $(1, 3, 2)$ och $(2, 1, 0)$. Ange också en linje L_2 som är parallell med L_1. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(b) Bestäm inversen till matrisen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(c) Låt $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$. Lös matrisekvationen $AX - B = X$. (3p)

Lösning:

Svar: ....

(d) Ett plan innehåller den räta linjen $(x, y, z) = (2 + 5t, 1 + 2t, 1 + t)$ och punkten $(3, -1 - 2)$. Bestäm en ekvation för planet. (4p)

Lösning:

Svar: ....

(e) Är linjen $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-4} = \dfrac{z-3}{3}$ vinkelrät mot planet du fick fram i uppgift d). (1p)

Lösning:

Svar: ....