Tentamensskrivning i matematik del A 20120109

Kurskod:LMA164
Examinator: Jonny Lindström tel. 0733 607040
Tid för tentamen: 08.30-12.30
Hjälpmedel: Inga

1. I ett rätblock med kvadratisk bottenyta är rymddiagonalen från bottenytan 5 cm. Rätblockets höjd är 3 cm. Beräkna det exakta värdet av rätblockets volym. (6p)

2. För vilka värden på konstanten k betyder ekvationen $\frac{x^2}{k^2+4} + \frac{y^2}{10-k} = 1$ en cirkel? (3p)

3. Lös ekvationen $| x^2 - x - 6 | = 6$. (5p)

4. Lös dubbelolikheten $2 - \frac{2}{x+1} \leq \frac{1}{x} < 4x$. (8p)

5. Ekvationen $z^4 - 4z^3 + 7z^2 - 6z + 2 = 0$ har dubbelroten 1. Lös ekvationen. (6p)

6. Lös ekvationen $z^2 + (2 + 2j)z - 3 - 2j = 0$. (6p)

7. Bestäm konstanten m så att den räta linjen $3x - 2y + m = 0$ tangerar cirkeln $x^2 + x + y^2 = 3$. (6p)

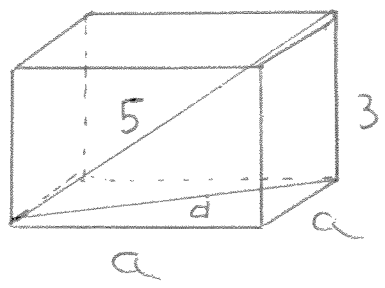
8.
a) Härled parabelns ekvation med brännpunkten $(0, c)$. Rita figur!

b) Visa att om två linjer L_1 och L_2 skär varandra under rät vinkel, gäller det för riktningskoefficienterna k_1 och k_2 att $k_2 = -\frac{1}{k_1}$. Rita figur!

c) Bestäm konstanten c så att divisionen $\frac{x^{36} - cx^5 + 35}{x - 1}$ går jämnt upp. (10p)

Lösningar 20120119

① Kvadratisk bottenyta med sidan a



Pyth. sats ger

$$\begin{cases} d^2 + 3^2 = 5^2 \\ a^2 + a^2 = d^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 2\sqrt{2} \\ d = 4 \end{array}$$

Volymen blir då:

$$V = 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 = 24 \text{ cm}^3$$

---

② Cirkel ger villkoret

$$k^2 + 4 = 10 - k$$

$$\Leftrightarrow$$

$$k^2 + k - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(k-2)(k+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$k_1 = 2 \quad , \quad k_2 = -3$$

③ $\underline{x < -2}$:

$x^2 - x - 6 = 6 \iff x_1 = 4$ $\boxed{x_2 = -3}$

falsk Ok

$\underline{-2 \le x < 3}$:

$-(x^2 - x - 6) = 6 \iff \boxed{x_1 = 0}$ $\boxed{x_2 = 1}$

Ok! Ok!

$\underline{x \ge 3}$:

$x^2 - x - 6 = 6 \iff \boxed{x_1 = 4}$ $\boxed{x_2 = -3}$

Ok! falsk!

---

④ $2 - \dfrac{2}{x+1} \le \dfrac{1}{x}$

(I)

$\iff$

$$\frac{(2x+1)(x-1)}{x(x+1)} \le 0$$

Teckenschema

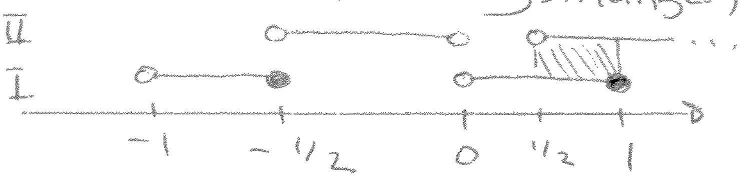
x		-1		$-\frac{1}{2}$		0		1	
x	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$2x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
hela	$+$	ej	$-$	0	$+$	ej	$-$	0	$+$

(II) $\dfrac{1}{x} < 4x \iff \dfrac{(2x+1)(2x-1)}{x} > 0$

Teckenschema

x		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$	
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
hela	$-$	0	$+$	ej	$-$	0	$+$

Tallinje (Lösningsmängd)



SVAR: $\frac{1}{2} < x \le 1$

⑤ $z_1 = 1$ och $z_2 = 1$

$$\Rightarrow z^4 - 4z^3 + 7z^2 - 6z + 2 = (z-1)(z-1) \cdot k(z)$$
$$= (z^2 - 2z + 1) \cdot k(z)$$

Polynomdivision ger

$$\begin{array}{r|l} & z^2 - 2z + 2 \quad = k(z) \\ \hline z^2 - 2z + 1 & z^4 - 4z^3 + 7z^2 - 6z + 2 \\ & -(z^4 - 2z^3 + z^2) \\ \hline & \quad -2z^3 + 6z^2 - 6z + 2 \\ & -(-2z^3 + 4z^2 - 2z \quad) \\ \hline & \qquad 2z^2 - 4z + 2 \\ & \quad -(2z^2 - 4z + 2) \\ \hline & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Lös $k(z) = 0$

$$z^2 - 2z + 2 = 0$$

ger

$$(z-1)^2 = -1$$

$$(z-1) = \pm j$$

$$z = 1 \pm j$$

SVAR: $z_1 = 1$
$z_2 = 1$
$z_3 = 1 + j$
$z_4 = 1 - j$

⑥ $z^2 + 2(1+j)z - 3 - 2j = 0$

$\Leftrightarrow$

$(z + (1+j))^2 - (1+j)^2 - 3 - 2j = 0$

$\Leftrightarrow$

$z + (1+j))^2 \cancel{-1} - 2j \cancel{+1} - 3 - 2j = 0$

$\Leftrightarrow$

$(z + (1+j))^2 - 3 - 4j = 0$

$\boxed{z + 1 + j = x + jy}$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 3 = 0 & \Rightarrow x^2 - \frac{4}{x^2} - 3 = 0 \\ 2xy - 4 = 0 & \Rightarrow y = \frac{2}{x} \end{cases}$$

$x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow t^2 - 3t - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (t+1)(t-4) = 0 \quad \boxed{t = 4} \quad x = \pm 2$

$x = 2$ ger $y = 1$

$\Rightarrow z + 1 + j = 2 + j \Leftrightarrow \boxed{z = 1}$

$x = -2$ ger $y = -1$

$\Rightarrow z + 1 + j = -2 - j$

$\Leftrightarrow \boxed{z = -3 - 2j}$

(7) $y = \frac{3}{2}x + \frac{m}{2}$

$$\Rightarrow \quad x^2 + x + \left(\frac{3}{2}x + \frac{m}{2}\right)^2 - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x^2 + x + \frac{9}{4}x^2 + \frac{3x}{2} \cdot \frac{m}{2} \cdot 2 + \frac{m^2}{4} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{13}{4}x^2 + x + \frac{3mx}{2} + \frac{m^2}{4} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{13}{4}x^2 + \left(\frac{3m}{2} + 1\right)x + \frac{m^2}{4} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$13x^2 + 4\left(\frac{3m}{2} + 1\right)x + m^2 - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x^2 + \frac{4}{13}\left(\frac{3m}{2} + 1\right)x + \frac{m^2 - 12}{13} = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x = -\frac{2}{13}\left(\frac{3m}{2} + 1\right) \pm \sqrt{\underbrace{\frac{4}{169}\left(\frac{3m}{2} + 1\right)^2 - \frac{m^2 - 12}{13}}_{=0 \text{ ger tangeringspunkt}}}$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{4}{13^2}\left(\frac{3m}{2} + 1\right)^2 = \frac{m^2 - 12}{13}$$

$$\left(\frac{3m}{2} + 1\right)^2 = \frac{13(m^2 - 12)}{4}$$

$$\frac{9m^2}{4} + 3m + 1 = \frac{13}{4}m^2 - \frac{13 \cdot 12}{4}$$

$$m^2 - 3m - 40 = 0$$

$$m = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{160}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{13}{2}$$

$$m_1 = 8 \qquad m_2 = -5$$