Tentamensskrivning i matematik del A 20121022

Kurskod:LMA164
Telefonvakt: Jonny Lindström tel. 0733 607040
Tid för tentamen: 14.00-18.00
Hjälpmedel: Inga

1. Bestäm skärningspunkterna mellan parabeln $y = x^2 + 2x - 40$ och den räta linjen $y = 3x + 2$. (3p)

2. Lös olikheten $\dfrac{(x+2)(x-1)}{x+3} \leq 0$ (5p)

3. Lös ekvationen $|x-1| - x = 5$
   a) algebraiskt b) grafiskt (6p)

4. Ekvationen $z^3 + 4z^2 - 7z + 30 = 0$ har en rot $z = -6$. Bestäm ekvationens övriga rötter. (5p)

5. För vilka värden på konstanten k betyder ekvationen $\dfrac{x^2}{k^2-4} + \dfrac{y^2}{5-k} = 1$
   a) en cirkel? b) en ellips? (4p)

6. Antag att $z_1 = 2 + j$ och att $z_2 = 1 - j$. Beräkna
   a) $\dfrac{z_1}{z_2}$ b) $\mathbf{Im}(\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2})$
   Skriv svaren på formen $x + jy$. (6p)

7. Förenkla uttrycket $\dfrac{x^4 - y^4}{(x-y)^3 + 2x^2y - 2xy^2}$ så långt som möjligt. (5p)

8. En triangel har sina hörn i punkterna $A = (1, -6)$, $B = (2, 6)$ och $C = (6, 14)$. Beräkna arean av triangeln ABC. (6p)

9. Härled parabelns ekvation med brännpunkten $(0, C)$. Rita figur! (5p)

10. Visa att om två linjer L_1 och L_2 skär varandra under rät vinkel, gäller det för riktningskoefficienterna k_1 och k_2 att $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$. Rita figur! (5p)

Lösningar 20121022

① $\begin{cases} y = x^2 + 2x - 40 \\ y = 3x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + 2x - 40 = 3x + 2$

$\Leftrightarrow$

$x^2 - x - 42 = 0$

$\Leftrightarrow$

$x_1 = -6 \Rightarrow y_1 = -16 \Rightarrow (x_1, y_1) = (-6, -16)$

$x_2 = 7 \Rightarrow y_2 = 23 \Rightarrow (x_2, y_2) = (7, 23)$

---

② Tabell

x		-3		-2		1	
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
hela	$-$	ej	$+$	0	$-$	0	$+$

$\Rightarrow x < -3 \lor -2 \le x \le 1$

---

③ a) $x \geq 1$: $|x-1| = x-1$

$x - 1 - x = 5$

Lösning saknas

$x < 1$: $|x-1| = -(x-1)$

$-x + 1 - x = 5$

$\Leftrightarrow$

$-2x = 4$

$\Leftrightarrow$

$x = -2$ Ok!

b) $\underbrace{|x-1| - x - 5}_{y} = 0$

$x < 1$:

$y = -x + 1 - x - 5$

$\Leftrightarrow$

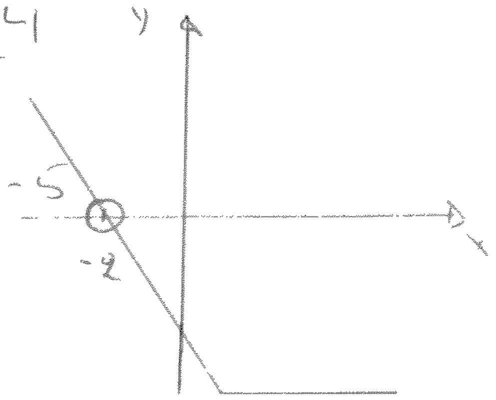
$y = -2x - 4$

$x \geq 1$:

$y = x - 1 - x - 5$

$\Leftrightarrow$

$y = -6$



4 $\quad z_1 = -6$

Polynomdivision ger

$$
\begin{array}{r|l}
 & z^2 - 2z + 5 = k(z) \\
\hline
z + 6 & z^3 + 4z^2 - 7z + 30 \\
 & -(z^3 + 6z^2 \qquad\qquad) \\
\hline
 & \quad -2z^2 - 7z + 30 \\
 & \quad -(-2z^2 - 12z \qquad) \\
\hline
 & \qquad\quad 5z + 30 \\
 & \qquad -(5z + 30) \\
\hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Lös $k(z) = 0$

$$z^2 - 2z + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$z = 1 \pm 2j$$

$$\Rightarrow \quad z_2 = 1 + 2j$$

$$z_3 = 1 - 2j$$

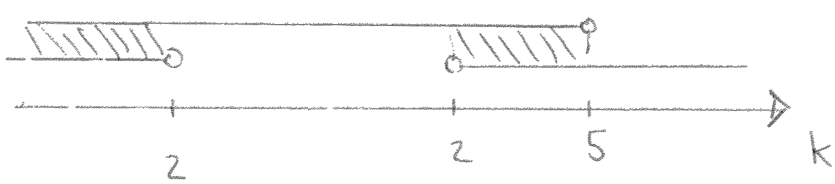
(5)

a) Cirkel: $k^2 - 4 = 5 - k$

$\Leftrightarrow$

$$k = \frac{-1 \pm \sqrt{37}}{2}$$

b) ellips: $k^2 - 4 > 0 \wedge 5 - k > 0$



$k < -2 \vee 2 < k < 5$

6

a) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(2+j)(1+j)}{(1-j)(1+j)} = \dfrac{2+2j+j-1}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}j.$

b) $\dfrac{1}{2+j} + \dfrac{1}{1-j} = \dfrac{2-j}{5} + \dfrac{1+j}{2} = \dfrac{4-2j+5+5j}{10} =$

$= \dfrac{9}{10} + \dfrac{3}{10}j$

$\Rightarrow \operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2}\right) = \dfrac{3}{10}.$

7

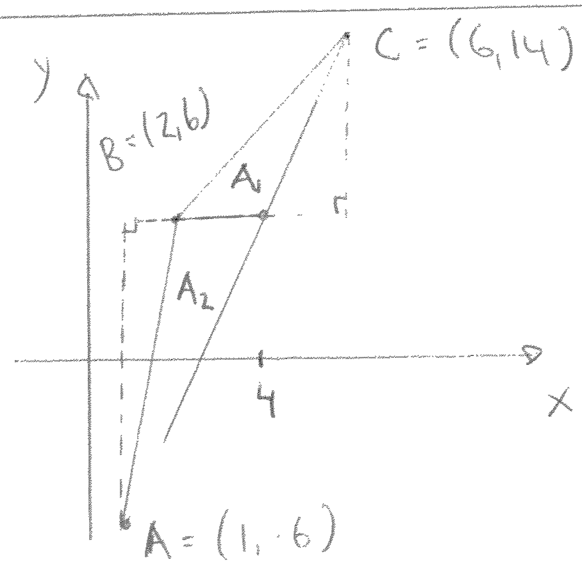
$\dfrac{x^4 - y^4}{(x-y)^3 + 2x^2y - 2xy^2} = \dfrac{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)}{(x-y)((x-y)^2+2xy)} =$

$\dfrac{(x+y)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} = x + y$

8

$L_{AC}: \ y = 4x - 10$

$y = 6 \Rightarrow x = 4$ på L_{AC}



Vi får då:

$A_1 = \dfrac{2 \cdot 8}{2} = 8$ a.e.

$A_2 = \dfrac{2 \cdot 12}{2} = 12$ a.e.

$A = A_1 + A_2 = 8 + 12 = 20$ a.e.