Tenta LMA164BC 2012-02-17: lösningsförslag.

1. (a) $L = 100 \;\Rightarrow\; 10 \lg I = -20 \;\Rightarrow\; \lg I = -2 \;\Rightarrow\; \mathbf{I = 10^{-2} W/m^2}$

   (b) Vi observerar först att uttrycken i ekvationen bara är definierade om $x > 0$. Med logaritmlagarna kan vi skriva om ekvationen:

   $$2\ln x - \ln 4 = \ln(3x+16) \iff \ln x^2 = \ln 4 + \ln(3x+16) \iff \ln x^2 = \ln 4(3x+16)$$

   Eftersom logaritmen är strängt växande, så är den sista ekvationen för $x > 0$ ekvivalent med

   $$x^2 = 4(3x+16) \iff x^2 - 12x - 64 = 0 \iff x = 6 \pm \sqrt{36+64} = 6 \pm 10$$

   Då den negativa roten är otillåten, har vi bara en lösning: $\mathbf{x = 16}$.

2. Räkna i polär form:

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^{200} = \left(1 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}}\right)^{200} = 1^{200} e^{j\frac{200\pi}{3}} = e^{j(66\pi + \frac{2\pi}{3})} = e^{j\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + j\sin\frac{2\pi}{3} =$$

$$= -\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3} = \mathbf{-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

3. (a)

$$\cos 3x = \frac{1}{2} \iff 3x = \pm\frac{\pi}{3} + n\cdot 2\pi \iff x = \pm\frac{\pi}{9} + n\frac{2\pi}{3}$$

   (b)

$$\sin 2x = \sqrt{2}\sin x \iff 2\sin x\cos x = \sqrt{2}\sin x$$

   Två fall: $\sin x = 0$ och $\sin x \neq 0$. I det förra fallet är lösningarna alla sinusfunktionens nollställen $x = n\pi$. I det senare fallet kan vi förkorta med $\sin x$ och få ekvationen

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff x = \pm\frac{\pi}{4} + n\cdot 2\pi$$

   Lösningar:
   (a) $\pm\frac{\pi}{9} + \mathbf{n}\frac{\mathbf{2}\pi}{\mathbf{3}} = \mathbf{\pm 20^\circ + n \cdot 120^\circ}$
   (b) $\mathbf{x = n\pi = n \cdot 180^\circ}$, $\mathbf{x} = \pm\frac{\pi}{\mathbf{4}} + \mathbf{n\cdot 2}\pi = \mathbf{\pm 45^\circ + n \cdot 360^\circ}$

4. Kurvan skär x-axeln då $x^3 - 3x^2 = 0 \iff x^2(x-3) = 0$, dvs förutom i origo har vi skärningspunkten $x = 3$, så vår punkt är $P = (3,0)$. Riktningskoefficienten för tangenten i denna punkt är $k_T = f'(3)$ och för normalen $k_N = -\frac{1}{f'(3)}$. Med $f'(x) = 3x^2 - 6x$ blir $k_T = 9$ och $k_N = -\frac{1}{9}$. Vi kan nu teckna ekvationerna för dessa linjer:

   Tangenten: $y - 0 = 9(x-3) \iff y = 9x - 27$

   Normalen: $y - 0 = -\frac{1}{9}(x-3) \iff y = -\frac{x}{9} + \frac{1}{3}$

   Tangent: $\mathbf{y = 9x - 27}$, **normal:** $\mathbf{y = -\frac{x}{9} + \frac{1}{3}}$

5. För $x < 0$ är $|x| = -x$, så vi kan skriva

$$\sqrt{x^2+2x} - |x| = \sqrt{x^2+2x} + x = \quad \{\text{ konjugatförläng! }\}$$

$$= \frac{(\sqrt{x^2+2x}+x)(\sqrt{x^2+2x}-x)}{\sqrt{x^2+2x}-x} = \frac{(x^2+2x)-x^2}{\sqrt{x^2+2x}-x} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}-x} =$$

$$\{\text{ bryt ut } x^2 \text{ ur kvadratroten }\} = \frac{2x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{2}{x}}-x} = \frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}-x} = \frac{2x}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}}-x}$$

$$= \frac{2}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1} \to \frac{2}{-1-1} = -1 \text{ då } x \to \infty$$

Gränsvärdet är -1.

6. Uppgiften är att definiera $f(1)$ så att f blir kontinuerlig i $x = 1$, vilket innebär att $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = A$ (funktionen är kontinuerlig för alla andra x oavsett valet av a).
Först tar vi reda på vad a ska vara. Eftersom nämnaren $x - 1$ blir noll då $x = 1$, så måste detta gälla även täljaren $x^2 + 3x + a$, annar blir det inget gränsvärde då $x \to 1$. Detta ger $a = -4$.
Vi faktoruppdelar täljaren, som har nollställena $x_1 = 1$ och $x_2 = -4$ (lös andragradaren $x^2 + 3x - 4 = 0$ eller utnyttja sambandet mellan rötterna och den konstanta koefficienten: $x_1 x_2 = -4$, $x_1 = 1$ är ju känd). Nu kan vi beräkna gränsvärdet:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x-4}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+4)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+4) = 5 = f(1) = A$$

Vi ska alltså välja $\mathbf{a = -4}$, $\mathbf{A = 5}$.

7. Vi kallar den kvadratiska basytans sida a. Höjden (den femte biten av järnstången) blir då $h = 12 - 4a$. Volymen kan nu tecknas och uttryckas i a enbart:

$$V(a) = \frac{a^2 h}{3} = \frac{a^2(12-4a)}{3} = \frac{4(3a^2-a^3)}{3}, \quad 0 \le a \le 3$$

Vi tillåter här $a = 0$ och $a = 3$, vilket förstås ger volymen noll. Vi deriverar och söker derivatans nollställen:

$$V'(a) = \frac{4(6a-3a^2)}{3} = \frac{12a(2-a)}{3}$$

$$V'(a) = 0 \iff a = 0 \text{ eller } a = 2.$$

Vi gör en teckentabell, i vilken derivatans tecken tolkas som växande/avtagande hos funktionen $V(a)$:

a	0	$<$	2	$<$	3
$V'(a)$	0	$+$	0	$-$	
$V(a)$	0	$\nearrow$	$\frac{16}{3}$	$\searrow$	0

Tabellen visar att volymen har lokalt och absolut maximum då $a = 2$ (m) samt att den maximala volymen är $V(2) = \dfrac{16}{3}$ (m^3). Vidare blir $h = 12 - 4a = 4$ (m).

Järnstången skall alltså delas i fyra 2-metersbitar och en 4-metersbit.

Del C, uppgift 2: se nästa sida!

C2

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h+2} - \frac{1}{x+2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x+2-(x+h+2)}{(x+h+2)(x+2)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h+2)(x+2)} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{(x+2)^2}}$$

Uppgift C1 och C3, se läroboken!