Lösningsförslag till LMA164B 2011-12-17

---

1. (a) $\lg(14-x)$ är definierat då $14-x>0$, $\lg(x-3)$ är definierat då $x-3>0$. Detta ger att $f(x)$ är definierad då $3<x<14$, dvs $\mathcal{D}_f=(3,14)$.

   Svar: $\mathcal{D}_{\mathbf{f}} = (\mathbf{3},\mathbf{14})$

   (b) Skriv om med log-lagar:

$$\lg(14-x)-\lg(x-3)=1$$
$$\lg\frac{14-x}{x-3}=\lg 10$$
$$\frac{14-x}{x-3}=10$$
$$14-x=10(x-3)$$
$$11x=44$$
$$\mathbf{x}=\mathbf{4}$$

   Svar: $\mathbf{x}=\mathbf{4}$

2. (a) $y(t)=20000$ ger:

$$20000=2000\cdot 10^{0,2t}$$
$$10^{0,2t}=10^1$$
$$0,2t=1$$
$$t=5$$

   Svar: **Efter 5 timmar.**

   (b) $y(t)=40000$ ger:

$$40000=2000\cdot 10^{0,2t}$$
$$10^{0,2t}=20$$
$$0,2t=\lg 20$$
$$t=5\lg 20$$

   Svar: **Efter $\mathbf{5}\lg\mathbf{20}$ $(\approx 6,5)$ timmar.**

3. (a)

$$\tan 3x=\sqrt{3}$$
$$3x=\frac{\pi}{3}+n\cdot\pi,\quad n\in\mathbb{Z}$$
$$x=\frac{\pi}{9}+n\cdot\frac{\pi}{3},\quad n\in\mathbb{Z}$$

   Svar: $\mathbf{x}=\frac{\pi}{\mathbf{9}}+\mathbf{n}\cdot\frac{\pi}{\mathbf{3}}=\mathbf{20}^\circ+\mathbf{n}\cdot\mathbf{60}^\circ,\quad \mathbf{n}\in\mathbb{Z}$

   (b)

$$\sin 5x=\sin(60^\circ-x)$$
$$5x=60^\circ-x+n\cdot 360^\circ\quad\text{eller}\quad 5x=180^\circ-(60^\circ-x)+n\cdot 360^\circ,\quad n\in\mathbb{Z}$$
$$6x=60^\circ+n\cdot 360^\circ\quad\text{eller}\quad 4x=120^\circ+n\cdot 360^\circ$$
$$x=10^\circ+n\cdot 60^\circ\quad\text{eller}\quad x=30^\circ+n\cdot 90^\circ$$

   Svar: $\mathbf{x}=\mathbf{10}^\circ+\mathbf{n}\cdot\mathbf{60}^\circ$ eller $\mathbf{x}=\mathbf{30}^\circ+\mathbf{n}\cdot\mathbf{90}^\circ,\quad \mathbf{n}\in\mathbb{Z}$

(c)

$$3\sin x + 3\sqrt{3}\cos x = c\sin(x+\phi) = (c\cos\phi)\sin x + (c\sin\phi)\cos x$$

Detta ger

$$\begin{cases} c\cos\phi & = & 3 \\ c\sin\phi & = & 3\sqrt{3} \end{cases}$$

varmed $c = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6$ och, då ϕ ligger i första kvadranten (cosinus och sinus är positiva), $\tan\phi = \sqrt{3}$ ger oss $\phi = \frac{\pi}{3} = 60°$.

Svar: $\mathbf{3\sin x + 3\sqrt{3}\cos x = 6\sin(x + \frac{\pi}{3}) = 6\sin(x + 60°)}$

4. Vi sätter $z = re^{jv}$ och skriver ekvationen i polär form:

$$z^4 = -16 \iff (re^{jv})^4 = 16e^{j(\pi + n\cdot 2\pi)} \iff r^4 e^{j4v} = 16e^{j(\pi+n\cdot 2\pi)}$$

$$\iff \begin{cases} r^4 & = & 16 \\ 4v & = & \pi + n\cdot 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} r & = & 2 \\ v & = & \frac{\pi}{4} + n\cdot\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

Vi har därmed lösningarna i exponentiell polär form:

$$z = 2e^{\frac{\pi}{4} + n\cdot\frac{\pi}{2}}, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

Insättning av vardera n-värdet ger

$$z = 2(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} + j\sqrt{2}$$

$$z = 2(\cos\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4}) = -\sqrt{2} + j\sqrt{2}$$

$$z = 2(\cos\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{4}) = -\sqrt{2} - j\sqrt{2}$$

$$z = 2(\cos\frac{7\pi}{4} + \sin\frac{7\pi}{4}) = \sqrt{2} - j\sqrt{2}$$

Kunskapen om att de fyra rötterna bildar en kvadrat på cirkeln $|z| = 2$ kan också användas för att snabbt få de tre senare rötterna ur den första.

Svar: $\mathbf{z = \sqrt{2} + j\sqrt{2},\ z = -\sqrt{2} + j\sqrt{2},\ z = -\sqrt{2} - j\sqrt{2},\ z = \sqrt{2} - j\sqrt{2}}$.

5. (a)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-x} = \text{(konjugatförlängning)} = \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x^2-x)(\sqrt{x+3}+2)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x+3)-4}{x(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{x(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{4}$$

Svar: $\mathbf{\frac{1}{4}}$

(b) Vi bryter ut x^2 ur rotuttrycket och använder att $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ då $x < 0$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x + \sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{5x + \sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{5x + \sqrt{x^2}\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}}{x} =$$

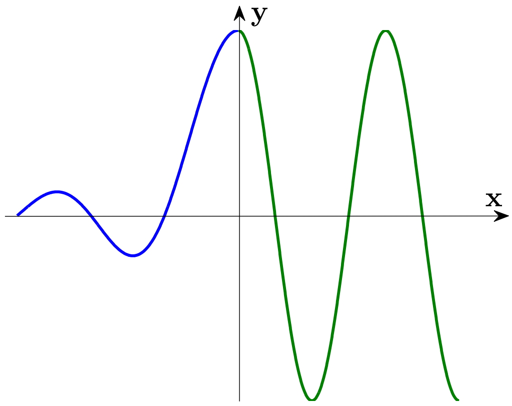
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{5x - x\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}}{x} = \lim_{x\to-\infty}(5 - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}) = 4$$

Svar: **4**

6. Att f är kontinuerlig i $x = 0$ innebär att $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$, vilket alltså ska kollas. Eftersom $f(0) = \cos(0) = 1$ och $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1 = \lim_{x\to 0^+} \cos x$ (höger- och vänstergränsvärden båda $= f(0)$), så är tydligen $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Vi har utnyttjat det kända gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, även om vi bara använde det från vänster.

   Svar: **Ja, funktionen är kontinuerlig i noll.**

   Så här ser grafen ut. Kontinuiteten visar sig genom att kurvan ”hänger ihop” i $x = 0$. Man kan också visa att f är deriverbar i $x = 0$ med $f'(x) = 0$, vilket kan anas i figuren - kurvan ser ur att ha en horisontell tangent i $x = 0$.



7. Vi skriver om $f(x)$ utan beloppstecken:

$$f(x) = \begin{cases} x^2(-x+2) = -x^3 + 2x^2 & \text{om} \quad x < 2 \\ x^2(x-2) = x^3 - 2x^2 & \text{om} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

   Derivatan existerar för $x \neq 2$:

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 4x & \text{om} \quad x < 2 \\ 3x^2 - 4x & \text{om} \quad x > 2 \end{cases}$$

   Insättning av $x = 2$ i vardera uttrycket ger oss de ensidiga derivatorna:

$$f'_-(2) = -4, \quad f'_+(2) = 4$$

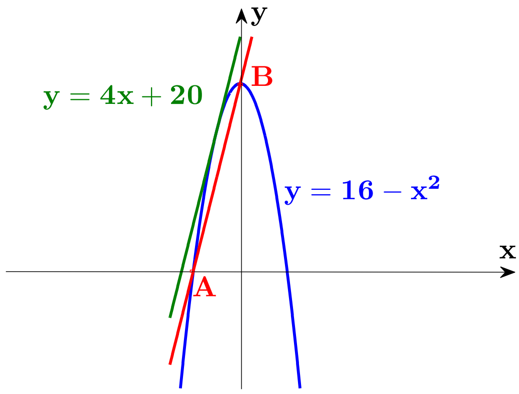
   med olika värden, så någon riktig derivata existerar inte i $x = 2$.

   Svar: **Ej deriverbar i $\mathbf{x = 2}$. $\mathbf{f'_-(2) = -4}$, $\mathbf{f'_+(2) = 4}$**

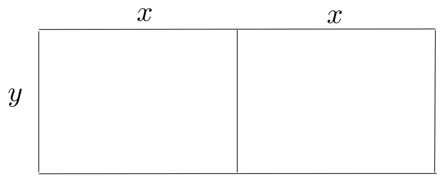
8. Vi tar reda på koordinaterna för A och B:
Skärningspunkter med x-axeln ges av $y = 0 \iff 16 - x^2 = 0 \iff x = \pm 4$
Eftersom A är skärningspunkten med *negativa* x-axeln, så är $x = -4$ och $A = (-4, 0)$.
Skärningspunkt med y-axeln ges av $x = 0 \iff y = 16$. Alltså: $B = (0, 16)$.
Riktningskoefficienten för linjen genom A och B är då $k = \dfrac{16 - 0}{0 - (-4)} = 4$.
Då vår sökta tangent ska ha samma riktningskoefficient, och då denna ges av derivatan av $f(x) = 16 - x^2$ i tangeringspunkten $x = a$, så är $f'(a) = 4 \iff -2a = 4 \quad a = -2$.
Tangeringspunkten är därför $(-2, 12)$ och tangentens ekvation i enpunktsform är:

$$y - 12 = 4(x - (-2)) \iff y = 4x + 20$$

Svar: $\mathbf{y = 4x + 20}$



9. Vi tecknar omkretsen L som en funktion av ena sträckan x (enligt figuren), varvid vi använder villkoret att arean är given för att lösa ut sidan y uttryckt i x.



$$L = 4x + 3y, \quad 2xy = 2400 \; \Rightarrow \; y = \frac{1200}{x}$$

$$\Rightarrow \quad L(x) = 4x + \frac{3600}{x}, \quad x > 0$$

$$L'(x) = 4 - \frac{3600}{x^2}, \quad L'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = 900 \; \Rightarrow \; x = 30, \; y = 40$$

Vi gör en teckentabell för att tolka derivatans betydelse:

x	$<$	30	$<$
$L'(x)$	$-$	0	$+$
$L(x)$	$\searrow$	240	$\nearrow$

Vi ser att vi funnit ett lokalt minimum, vilket samtidigt måste vara det minsta värdet för alla $x > 0$. Rektangelns sidor ska vara $2x$ =60 m och $y = 40$m, den extra biten 40 m.

Svar: **Den minimala stängsellängden blir 240 m och då ska de tre parallella stängselsträckorna vara 40 m, de andra två ska vara 60 m.**