

LMA164BC 2013-02-11: lösningar till uppgifterna.

1. (a) Logaritmera (lg och ln går lika bra, men här väljs lg eftersom högerledet är talet 10) och använd loglagarna:

$$\lg(7 \cdot 6^{-x}) = \lg 10 \iff \lg 7 + \lg 6^{-x} = 1 \iff \lg 7 - x \lg 6 = 1 \iff$$

$$x = \frac{\lg 7 - 1}{\lg 6} \approx -0,199 \text{ (kan skrivas på flera olika sätt).}$$

- (b) Först observerar vi att alla uttrycken i ekvationen är definierade endast då $x > 6$. Med loglagarna kan vi skriva om ekvationen enligt:

$$\ln(x-4) + \ln(x-6) = 3 \ln 2 + \ln 3 \iff \ln((x-4)(x-6)) = \ln(2^3 \cdot 3)$$

Då logaritmen är injektiv, vet vi att för $x > 6$ gäller

$$(x-4)(x-6) = 24 \iff x^2 - 10x = 0 \iff x(x-10) = 0$$

Den sista ekvationen har lösningarna $x = 0$ och $x = 10$, men bara den senare uppfyller kravet $x > 6$.

Enda lösningen är $\mathbf{x = 10}$.

2. (a) Vi löser ekvationen $\tan 5x = \sqrt{3}$ fullständigt:

$$5x = \arctan \sqrt{3} + n \cdot \pi = \frac{\pi}{3} + n \cdot \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{15} + n \frac{\pi}{5}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Vi stegar sedan n från noll och uppåt och hittar då alla lösningar mellan 0 och π :

$$\frac{\pi}{15}, \frac{4\pi}{15}, \frac{7\pi}{15}, \frac{2\pi}{3}, \frac{13\pi}{15}$$

- (b) Vi löser ekvationen $\sin 6x = 0,7$ fullständigt:

$$\begin{cases} 6x = \arcsin(0,7) + n \cdot 360^\circ, \Rightarrow x \approx 7,4^\circ + n \cdot 60^\circ, \quad n \in \mathbb{Z} \\ 6x = 180^\circ - \arcsin(0,7) + n \cdot 360^\circ, \Rightarrow x \approx 22,6^\circ + n \cdot 60^\circ, \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Vi stegar sedan n från noll och uppåt och hittar då alla lösningar mellan 0° och 90° :

$$\mathbf{7,4^\circ, 22,6^\circ, 67,4^\circ, 82,6^\circ}$$

3. Areasatsen, med $a = 12$, $b = 15$ och C = vinkeln mellan a och b :

$$\frac{1}{2}ab \sin C = 45 \Rightarrow \sin C = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 30^\circ \text{ eller } C = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

Vi har alltså två möjligheter, och eftersom $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ och $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, så ger cosinussatsen den återstående sidan c enligt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 12^2 + 15^2 - 2 \cdot 180(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}) = 369 \mp 180\sqrt{3}$$

Vi får $c = \sqrt{369 - 180\sqrt{3}} \approx \mathbf{7,6}$ cm eller $c = \sqrt{369 + 180\sqrt{3}} \approx \mathbf{26,1}$ cm.

4. Vi skriver om ekvationen som $z^6 = -64$ och därefter i polär form. Med $z = re^{j\theta}$ får vi då:

$$r^5 e^{j6\theta} = 64 e^{j(\pi + k \cdot 2\pi)} \iff r^5 = 64 \text{ och } 6\theta = \pi + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff r = 2 \text{ och } \theta = \frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Det räcker att ta $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, eftersom de 6 rötterna upprepar sig periodiskt. Vi får då $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$. Rötterna bildar en regelbunden 6-hörning på cirkeln $|z| = 2$, så vi behöver egentligen bara beräkna de två första rötterna och sedan utnyttja denna symmetri.

$$k = 0 \Rightarrow z = 2(\cos \frac{\pi}{6} + j \sin \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} + j, \quad k = 1 \Rightarrow z = 2(\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2}) = 2j$$

Genom speglingar i koordinataxlarna (teckenbyten på en koordinat i taget) får vi de övriga. Alla rötterna: $\sqrt{3} + j$, $2j$, $-\sqrt{3} + j$, $-\sqrt{3} - j$, $-2j$, $\sqrt{3} - j$

5. (a) Polynomen i täljare och nämnare har båda nollställe $x = 3$, vilket enligt factorsatsen innebär att de har den gemensamma faktorn $x - 3$. Faktoruppdelar båda och förkorta bort $x - 3$. Därefter ser vi vad gränsvärdet då $x \rightarrow 3$ blir.

$$\frac{x^2 - 9}{2x^2 - 7x + 3} = \frac{(x+3)(x-3)}{(2x^2 - 1)(x-3)} = \frac{x+3}{2x^2 - 1} \rightarrow \frac{6}{5} \text{ då } x \rightarrow 3$$

- (b) Återigen går täljare och nämnare mot noll. På grund av rottuttrycken prövar vi med en konjugatförlängning.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1-3x}}{x+x^2} &= \frac{(\sqrt{1+3x} - \sqrt{1-3x})(\sqrt{1+3x} + \sqrt{1-3x})}{(x+x^2)(\sqrt{1+3x} + \sqrt{1-3x})} = \\ &= \frac{(1+3x) - (1-3x)}{x(1+x)(\sqrt{1+3x} + \sqrt{1-3x})} = \frac{6x}{x(1+x)(\sqrt{1+3x} + \sqrt{1-3x})} = \\ &= \frac{6}{(1+x)(\sqrt{1+3x} + \sqrt{1-3x})} \rightarrow 3 \text{ då } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

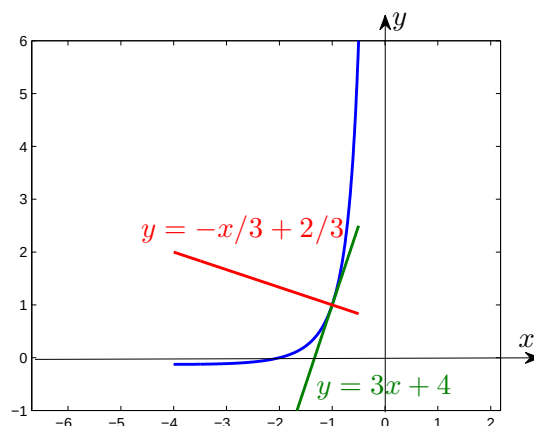
6. För båda de begärda linjerna behöver vi derivatan i den aktuella punkten där $x = -1$.

$$f(x) = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = 2x^{-2} + x^{-1}, \quad f'(x) = -4x^{-3} - x^{-2}, \quad f'(-1) = 3$$

Tangentens riktningskoefficient är $f'(-1) = 3$, normalens är $-\frac{1}{f'(-1)} = -\frac{1}{3}$. Båda linjerna går genom punkten $(-1, 1)$, vilket ger ekvationerna:

$$\text{Tangent: } y - 1 = 3(x - (-1)), \quad \text{Normal: } y - 1 = -\frac{1}{3}(x - (-1))$$

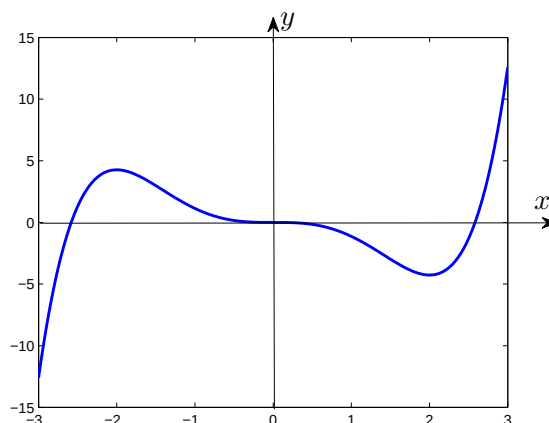
Efter förenkling: **tangent:** $y = 3x + 4$, **normal:** $y = -\frac{x}{3} + \frac{2}{3}$



7. Derivatan är $f'(x) = x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) = x^2(x+2)(x-2)$. Dess nollställen är därmed $-2, 0, 2$. Eftersom $(x+2)(x-2)$ är negativt mellan sina nollställen -2 och 2 och positivt i yttreintervallen och x^2 är positivt för $x \neq 0$, så får vi följande teckentabell:

x	$<$	-2	$<$	0	$<$	2	$<$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{64}{15}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{64}{15}$	$\nearrow$

Tabellen visar att vi har **ett lokalt maximum i $x = -2$, en terrasspunkt i $x = 0$ och ett lokalt minimum i $x = 2$** . Se figuren! (Figur krävdes dock inte i uppgiften.)



8. Om vi separerar fallen $x < 2$ och $x \geq 0$, får vi:

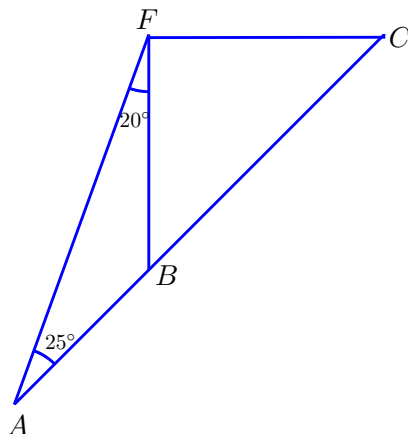
$$f(x) = \begin{cases} -(x-2)(x-2) + 4x = -x^2 + 8x - 4 & \text{om } x < 2 \\ (x-2)(x-2) + 4x = x^2 + 4 & \text{om } x \geq 2 \end{cases}$$

Funktionsvärdet $f(2) = 8$ avläses i det andra uttrycket. Genom att låta $x \rightarrow 2^-$ i det första uttrycket och $x \rightarrow 2^+$ i det andra uttrycket, ser vi att vänster- och högervärdena båda är lika med 8, vilket visar att $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$. Detta innebär att **funktionen är kontinuerlig i $x = 2$** . Vi kan derivata funktionen på båda sidor:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 8 & \text{om } x < 2 \\ 2x & \text{om } x > 2 \end{cases}$$

Detta ger oss $f'_-(2) = f'_+(2) = 4$ (dessa gränsvärden svarar ju mot dem vi har via deriveringsreglerna för polynomuttrycken tagna i $x = 2$), så **funktionen är deriverbar i $x = 2$ med $f'(2) = 4$** .

9. Med beteckningar enligt figuren börjar vi i triangeln ABF, där A är startpunkten kl 8.00, B är läget kl 9.00, F är fyren. Vinkeln vid F är 20° (kolla själv!).



Vi vill veta när båten nått punkten C , så att fyren F syns rakt i väster. Sinussatsen ger

$$\frac{BF}{\sin 25^\circ} = \frac{AB}{\sin 20^\circ} \Rightarrow BF = \frac{AB \sin 25^\circ}{\sin 20^\circ}$$

Eftersom triangeln BCF är en halv kvadrat, är diagonalen

$$BC = BF\sqrt{2} = \frac{AB\sqrt{2} \sin 25^\circ}{\sin 20^\circ}$$

Eftersom sträckan AB tog en timma får vi tiden till $\frac{\sqrt{2} \sin 25^\circ}{\sin 20^\circ} \approx 1,747$ h ≈ 1 h 45 min efter kl 9.00. **Fyren är rakt i väster klockan 10.45.**