

Tenta 1: lösningsförslag.

1. (a) Genom att ta reda på nämnarens nollställen (lös andragradare!), $x = 2$ och $x = -3$, kan vi faktorisera den med stöd av faktorsatsen. Vi får

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2+x-6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{5}$$

- (b) Vi bryter ut x^2 ur rotuttrycket och observerar att $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ då $x < 0$. Vi förkortar sedan med x varefter vi kan se vad som händer då $x \rightarrow -\infty$.

$$\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}} = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{2x+1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{2+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \rightarrow \frac{2}{-1}$$

då $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}} = -2$$

2. Eftersom tangenten till kurvan $y = f(x) = x^2 - x$ ska vara parallell med linjen $y = 3x - 1$, ska den ha riktningskoefficienten 3, vilket är fallet om tangenten dras i en punkt på kurvan där $f'(x) = 3$. Vi löser denna ekvation: $f'(x) = 2x - 1 = 3 \iff x = 2$. Den tangent vi söker är alltså räta linjen genom $(2, f(2)) = (2, 2)$ med riktningskoefficienten 3, vilken i enpunktsform är

$$y - 2 = 3(x - 2) \iff y = 3x - 4$$

3. Funktionen kan också skrivas: $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{om } x < 0 \\ 1 & \text{om } x > 0 \end{cases}$ Den är inte definierad i $x = 0$.

- (a) Av omskrivningen ser vi att f har olika vänster- och högergränsvärden då x går mot noll, därmed inget gränsvärde.
- (b) Funktionen är kontinuerlig i *varje punkt i sin definitionsmängd*. Noll ingår ju inte i definitionsmängden. Därmed sägs f vara kontinuerlig (en *kontinuerlig funktion*).

4. (a) En lösning till $\sin x = \frac{1}{2}$ är $x = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$, en annan är dess supplementvinkel $\pi - \frac{\pi}{6} = 180^\circ - 30^\circ$. Med hjälp av dessa kan vi uttrycka samtliga lösningar:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi = 30^\circ + n \cdot 360^\circ \\ x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi = 150^\circ + n \cdot 360^\circ \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

- (b)

$$2 \sin x = \sin 2x \iff 2 \sin x = 2 \sin x \cos x \iff 2 \sin x(1 - \cos x) = 0$$

$$\iff \sin x = 0 \text{ eller } \cos x = 1$$

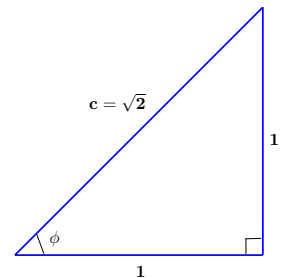
Lösningarna till den andra av dessa två ekvationer är desamma som varannan lösning till den första (om $\cos x = 1$ så är också $\sin x = 0$, men $\sin x = 0$ inträffar även då $\cos x = -1$, se enhetscirkeln!). Samtliga lösningar till vår ursprungliga ekvation är därmed alla lösningar till $\sin x = 0$:

$$x = n \cdot \pi = n \cdot 180^\circ, \quad n \in \mathbb{Z}$$

- (c) Här gör vi omskrivningen $\cos 2x + \sin 2x = c \sin(2x + \phi)$. Vi utvecklar med additionsformeln för sinus:

$$1 \cdot \cos 2x + 1 \cdot \sin 2x = (c \cos \phi) \sin 2x + (c \sin \phi) \cos 2x$$

vilket ger $c = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ och $\begin{cases} \cos \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$



och vi ser att $\phi = \frac{\pi}{4}$. Vår ekvation kan därmed skrivas

$$\sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \iff \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 1 \iff 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Man löser ut x och får

$$x = \frac{\pi}{8} + n \cdot \pi \quad (= 22,5^\circ + n \cdot 180^\circ)$$

5. Sätt $z = re^{jv}$ och skriv ekvationens båda led i polär form. vi får:

$$r^3 e^{j \cdot 3v} = 8 e^{j(\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi)} \iff r^3 = 8 \text{ och } 3v = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \iff r = 2 \text{ och } v = \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{2\pi}{3}$$

där $n = -1$, $n = 0$, $n = 1$ ger de tre rötterna. Vi får då

$$z = 2(\cos(\frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{2\pi}{3}) + j \sin(\frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{2\pi}{3}))$$

$$n = -1 \Rightarrow z = 2(\cos(-\frac{\pi}{2}) + j \sin(-\frac{\pi}{2})) = 2(0 - j \cdot 1) = -2j$$

$$n = 0 \Rightarrow z = 2(\cos(\frac{\pi}{6}) + j \sin(\frac{\pi}{6})) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2}) = \sqrt{3} + j$$

$$n = 1 \Rightarrow z = 2(\cos(\frac{5\pi}{6}) + j \sin(\frac{5\pi}{6})) = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2}) = -\sqrt{3} + j$$

Lösningarna är $-2j$, $\sqrt{3} + j$, $-\sqrt{3} + j$.

6. (a) Det som begränsar definitionsmängden är att logaritmerna bara existerar för positiva tal. Detta ger att $x - 4 > 0$ och $8 - x > 0$ måste vara uppfyllda. Det betyder att $4 < x < 8$, dvs $\mathcal{D}_f = (4, 8)$.
- (b) För att finna eventuella nollställen skriver vi om funktionen med hjälp av logaritmlagarna:

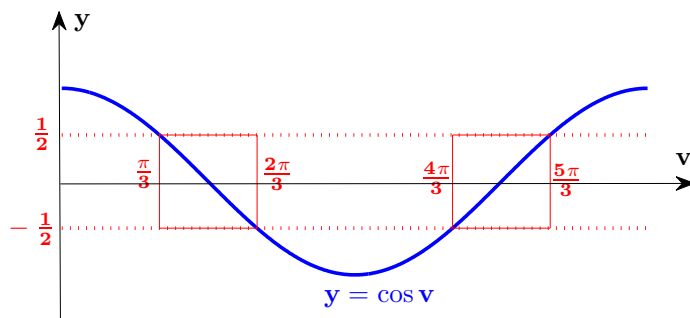
$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff \ln \frac{x-4}{3(8-x)} = 0 \iff \frac{x-4}{3(8-x)} = 1 \\ &\iff x-4 = 3(8-x) \iff 4x = 28 \iff x = 7 \end{aligned}$$

7. Olikheten kan också skrivas: $-\frac{1}{2} \leq \cos v \leq \frac{1}{2}$. Vi tar först reda på för vilka v som likhet råder mellan $\cos v$ och ytterleden i dubbelolikheten, ritar sedan kurvan $y = \cos x$ och tolkar olikheten i figuren.

$\cos v = \frac{1}{2}$ har allmänna lösningen $v = \pm \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. De enda lösningarna mellan 0 och 2π får vi med plustecknet och $n = 0$ samt med minustecknet och $n = 1$, dvs $x = \frac{\pi}{3}$ respektive $x = \frac{5\pi}{3}$.

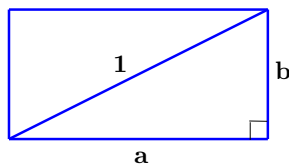
$\cos v = -\frac{1}{2}$ har allmänna lösningen $v = \pm \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. De enda lösningarna mellan 0 och 2π får vi med plustecknet och $n = 0$ samt med minustecknet och $n = 1$, dvs $x = \frac{2\pi}{3}$ respektive $x = \frac{4\pi}{3}$.

Vi ritar nu kurvan och undersöker i vilka intervall $\cos v$ håller sig mellan $-\frac{1}{2}$ och $\frac{1}{2}$. Cosinus är strängt avtagande mellan 0 och π , strängt växande mellan π och 2π .



Vi ser nu att olikheten är sann om $\frac{\pi}{3} \leq v \leq \frac{2\pi}{3}$ eller $\frac{4\pi}{3} \leq v \leq \frac{5\pi}{3}$.

8. Vi kallar rektangelns sidor a och b , där sidan a är den som ska rullas ihop till en cirkel.



Eftersom rektangelns diagonal har längden 1 dm, så gäller enligt Pythagoras sats att $a^2 + b^2 = 1$. Om vi tillverkar en cylinder enligt beskrivningen, blir dess basyta en cirkel med radien $r = \frac{a}{2\pi}$ och dess höjd blir b . Cylindern är öppen upptill och nertill, men dess böjda yta begränsas med tänkt botten och lock en volym som är $V = \pi r^2 b = \frac{\pi \cdot a^2 b}{4\pi^2}$. Eftersom $a^2 + b^2 = 1$, kan vi beskriva volymen som beroende av bara en variabel, sätt $a^2 = 1 - b^2$:

$$V(b) = \frac{\pi(1 - b^2)b}{4\pi^2} = \frac{1}{4\pi}(b - b^3), \quad 0 < b < 1$$

Vi deriverar och tar reda på derivatans nollställe(n) och teckenväxlingar.

$$V'(b) = \frac{1}{4\pi}(1 - 3b^2), \quad V'(b) = 0 \iff b = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (b > 0)$$

Vi gör en teckentabell, i vilken derivatans tecken tolkas som växande/avtagande hos funktionen $V(b)$:

b	0	<	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	<	1
$V'(b)$		+	0	-	
$V(b)$	(0)	↗	$\frac{1}{6\pi\sqrt{3}}$	↘	(0)

Tabellen visar att volymen har lokalt och absolut maximum då $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$ dm (vi finner också att $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$ dm) och att den maximala volymen är $V(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{6\pi\sqrt{3}}$ dm².

9. Se boken!