

Härledning av amplitud-fasvinkelform, en variant på lärobokens framställning.

Vi ska göra omskrivningen $a \cos v + b \sin v = c \sin(v + \phi)$ och utreda sambandet mellan de givna konstanterna a , b och de införda c , ϕ . Uttrycket i högerledet sägs vara i *amplitud-fasvinkelform*, *amplituden* är c , *fasvinkeln* är ϕ . Vi bestämmer oss från början för att c ska vara positiv (kan göras även med negativt c , och om $c = 0$ svarar det mot $a = b = 0$ vilket är ointressant).

Vi startar här: Idén är att utgå ifrån högerledet och via additionsformeln för sinus jämföra med vänsterledet och se sambandet mellan konstanterna.

$$HL = c \sin(v + \phi) = c(\sin \phi \cos v + \cos \phi \sin v) = (c \sin \phi) \cos v + (c \cos \phi) \sin v$$

$$VL = a \cos v + b \sin v$$

Om vi jämför dessa uttryck, ser vi att de blir lika (för alla värden på v) om

$$\begin{cases} c \sin \phi &= a \\ c \cos \phi &= b \end{cases}$$

Ur detta ekvationssystem får vi:

$$(c \sin \phi)^2 + (c \cos \phi)^2 = a^2 + b^2 \iff c^2(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = a^2 + b^2$$

så med trigonometriska ettan

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (c > 0)$$

Ur samma system får vi också

$$\tan \phi = \frac{c \sin \phi}{c \cos \phi} = \frac{a}{b}$$

vilket ger

$$\phi = \arctan\left(\frac{a}{b}\right) + n \cdot \pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Vi vet att arcustangens alltid har sitt värde i 1:a eller 4:e kvadranten. Av likheten $c \cos \phi = b$ ser man att tecknet på b ($c > 0$ alltid) avgör hur man ska välja n i föregående uttryck för vinkeln ϕ : Om $b > 0$ så är $\cos \phi > 0$, och ϕ ligger i 1:a ($a > 0$) eller 4:e ($a < 0$) kvadranten. Då väljer vi $n = 0$, vi är redan i rätt kvadrant.

Om $b < 0$ så är $\cos \phi < 0$, och ϕ ligger i 2:a ($a > 0$) eller 3:e ($a < 0$) kvadranten. Då väljer vi $n = 1$, så hamnar vi i rätt kvadrant.

Vi har alltså visat att

$$a \cos v + b \sin v = c \sin(v + \phi)$$

där $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ och

$$\phi = \arctan\left(\frac{a}{b}\right) \text{ om } b > 0,$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{a}{b}\right) + \pi \text{ om } b < 0.$$