

Lösningar till tentan 20100308

①. $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 9$

$v(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 12t + 9 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1$
 $\Rightarrow t_1 = 1, t_2 = 3$ (som är 2 intervaller $[0, 4]$).

②. $f(x) = xe^{-x} \Rightarrow f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x) \Rightarrow f''(x) = -e^{-x}(1-x) - e^{-x}$
 $= e^{-x}(-1+x-1) = e^{-x}(x-2)$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-x}}_{\neq 0} (x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

x	2
$f''(x)$	- 0 +

$f(2) = 2e^{-2}$

Inflexionspunkten är $P(2, 2e^{-2})$.

$f(x)$ inflex.
punkt

③. $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$; $D_f = \text{alla } x \in \mathbb{R}, x \neq 1$.

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \Rightarrow x=1$ lodrät asymptot.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\frac{x^2-2x+1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x-2+\frac{1}{x}} = 0$

$\Rightarrow y=0$ vdrät asymptot.

$f'(x) = \frac{(x-1)^2 - x \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{x-1-2x}{(x-1)^3} = \frac{-x-1}{(x-1)^3}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x-1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

$f(-1) = \frac{-1}{(-2)^2} = -\frac{1}{4}$

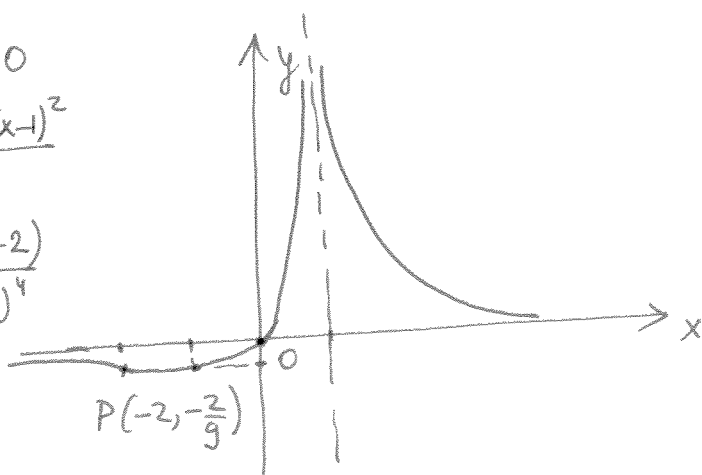
$(-1, -\frac{1}{4})$ lokal max

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+ ↗	-
$f(x)$	0	$-\frac{1}{4}$	↗ $+\infty$	0
$f''(x)$				

$f''(x) = \frac{-x+1+3x+3}{(x-1)^4} = \frac{2(x+2)}{(x-1)^4}$

x	-2	1
$f''(x)$	- 0 + ↗	+

$f(x)$ inflex. $f(-2) = -\frac{2}{9}$ inflexionspunkt!



4) a) $x^2 - 3x > 0 \Leftrightarrow x(x-3) > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ eller } x > 3$

$D_f = (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

b) $f'(x) = \frac{1}{x^2 - 3x} \cdot (2x - 3) = \frac{2x - 3}{x(x-3)}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \notin D_f \Rightarrow$ inga lokala extrempunkter

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Asymptoter:

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(x^2 - 3x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x^2 - 3x) = -\infty$

$x=0$ och $x=3$ lodräta asymptoter

c) $f'(4) = \frac{2 \cdot 4 - 3}{4(4-3)} = \frac{5}{4}$

$f(4) = \ln(4^2 - 3 \cdot 4) = \ln 4$

Tangentens ekv. är $y - f(4) = f'(4)(x - 4) \Leftrightarrow y - \ln 4 = \frac{5}{4}(x - 4)$

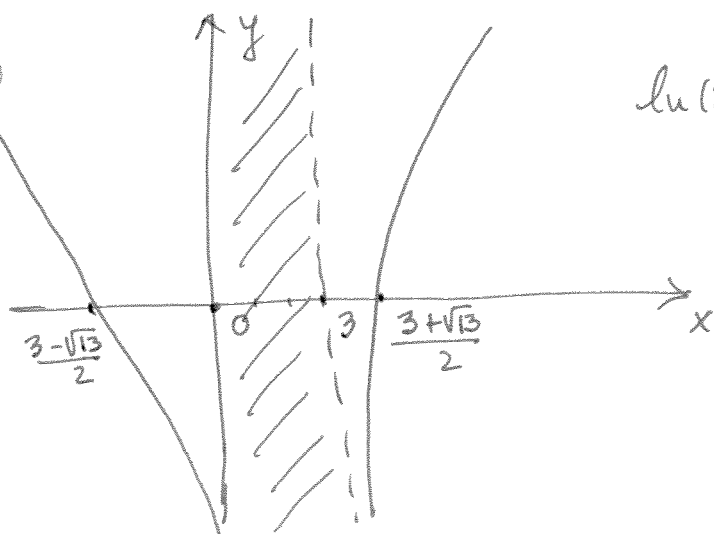
$\Leftrightarrow y - \ln 4 = \frac{5x}{4} - 5 \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{5x}{4} + \ln 4 - 5}$

d) $f''(x) = \frac{2(x^2 - 3x) - (2x - 3) \cdot (2x - 3)}{x^2(x-3)^2} = \frac{2x^2 - 6x - (4x^2 - 12x + 9)}{x^2(x-3)^2} =$
 $= \frac{-2x^2 + 6x - 9}{x^2(x-3)^2} = \frac{-2(x^2 - 3x + \frac{9}{2})}{x^2(x-3)^2}$

$x^2 - 3x + \frac{9}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{9}{2}} \notin \mathbb{R} \Rightarrow f''(x) \neq 0$ för alla $x \in D_f$

och $x^2 - 3x + \frac{9}{2} > 0 \Rightarrow f''(x) < 0$ för alla $x \in D_f \Rightarrow f$ konkav på $(-\infty, 0)$ och $(3, +\infty)$.

$\ln(x^2 - 3x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 1 \Leftrightarrow$
 $x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$



⑤ $v(x) = x^3 + 5x$; $\frac{dx}{dt} = 3$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = (3x^2 + 5) \cdot 3 \Rightarrow \frac{dv}{dt} \Big|_{x=3} = (3 \cdot 3^2 + 5) \cdot 3 = 96.$$

⑥ $\cos y = y^2 \sin x \Rightarrow -\sin y \cdot y' = 2y y' \sin x + y^2 \cos x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y'(2y \sin x + \sin y) = -y^2 \cos x \Rightarrow y' = \frac{-y^2 \cos x}{2y \sin x + \sin y}$$

$$\cos y = y^2 \sin x \Rightarrow \sin x = \frac{\cos y}{y^2}$$

$$1 - \sin^2 y = y^4 \sin^2 x \Rightarrow \sin^2 y = 1 - y^4 \sin^2 x \Rightarrow \sin y = \pm \sqrt{1 - y^4 \sin^2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-y^2 \cos x}{2y \sin x \pm \sqrt{1 - y^4 \sin^2 x}}$$

⑦ $f(x) = \cos^2 x - 2 \sin x$, $0 \leq x \leq 2\pi$

$$f'(x) = -2 \cos x \sin x - 2 \cos x = -2 \cos x (\sin x + 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ eller } \sin x = -1$$

$$\cos x = 0, x \in [0, 2\pi] \Rightarrow x = \pi/2 \text{ eller } 3\pi/2$$

$$\sin x = -1, x \in [0, 2\pi] \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f'(x)$	—	0	+	—
$f(x)$	1	$\searrow$	$\nearrow$	1
		-2	2	

$$f'(x) = -2 \cos x (\underbrace{\sin x + 1}_{\geq 0})$$

$$\cos x > 0 \text{ om } x \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$$

$$\cos x < 0 \text{ om } x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$$

$$f(0) = 1, f(\frac{\pi}{2}) = -2, f(\frac{3\pi}{2}) = 2, f(2\pi) = 1$$

Största värdet är 2 och minsta värdet är -2.

$$f''(x) = 2 \sin x (\sin x + 1) - 2 \cos x \cdot \cos x = 2 (\sin^2 x + \sin x - \cos^2 x) = 2 (\sin^2 x + \sin x - 1 + \sin^2 x) = 2 (2 \sin^2 x + \sin x - 1) = 4 (\sin x + 1) (\sin x - \frac{1}{2})$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

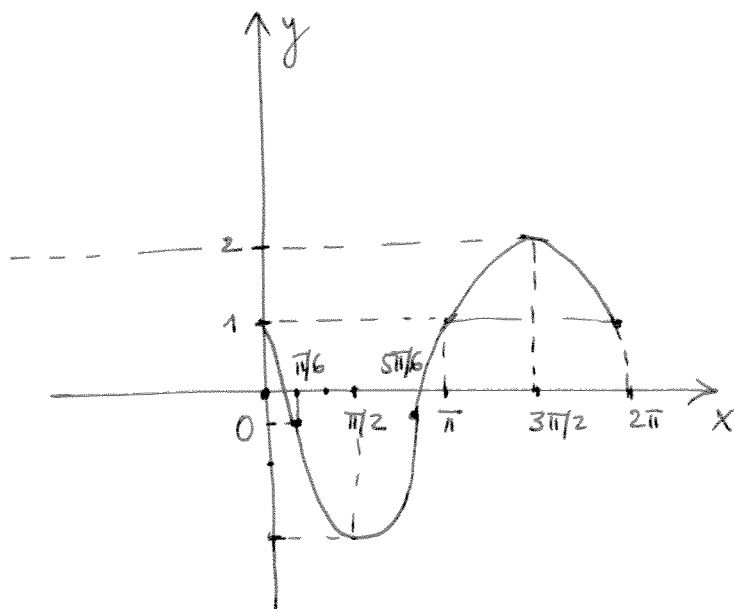
$$\Rightarrow \sin x = -1 \text{ eller } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Om } \sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{Om } \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pi/6 \text{ eller } \pi - \pi/6 = 5\pi/6$$

x	0	$\pi/6$	$5\pi/6$	$3\pi/2$	2π
$f''(x)$	—	0	+	—	0
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

Inflexionspunkter: $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$. $\frac{3\pi}{2}$ är inte inflexionspunkt!



$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2$$

(8) Antag att g är deriverbar i x och f deriverbar i $g(x)$. Då är $f \circ g$ deriverbar i x och $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Bevis: (fall $g(x+h) \neq g(x)$ för alla h).

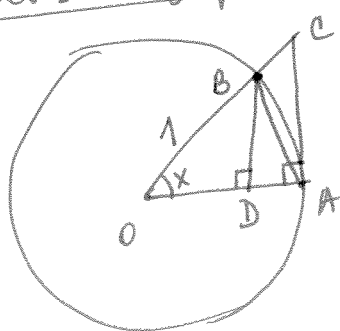
$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{= g'(x)} = \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(g(x)+k) - f(g(x))}{k} \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x). \end{aligned}$$

$\left[\begin{array}{l} g(x+h) - g(x) = k \\ k \rightarrow 0 \text{ om } h \rightarrow 0 \end{array} \right]$
pga g kontinuerlig i x

(9) Hjälpsats: $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ för alla $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, $x \neq 0$.

Hjälpsatsen implicerar $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, eftersom $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$
och $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ och instängningsatsen: $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

Bevis av hjälpsatsen: Antag först $x \in (0, \pi/2)$.



$$\sin x = \frac{BD}{OB} = \frac{BD}{1} \Rightarrow BD = \sin x$$

$$\tan x = \frac{AC}{OA} = \frac{AC}{1} \Rightarrow AC = \tan x$$

Area $\triangle OAB < \text{area sektorn } OAB < \text{area } \triangle OAC$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot BD \cdot OA < \frac{1}{2} \cdot x < \frac{1}{2} \cdot OA \cdot AC \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x < x < \tan x \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad (x > 0).$$

$$\text{Om } x < 0 \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow \cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < 1 \Rightarrow \cos x < \frac{-\sin x}{-x} < 1$$

$\Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Satsen är bevisad.