

Tentamensskrivning i matematik del E 20120521

Kurskod: LMA164

Examinator: Jonny Lindström tel. 0733 607040

Tid för tentamen: 08.30-12.30

Hjälpmedel: Inga

1. Beräkna följande integraler.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int x e^{2x} dx & \text{b)} \int_1^2 \frac{x}{x^2 + 3x + 2} dx & \text{c)} \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \end{array} \quad (10\text{p})$$

Lösning:

$$\text{a)} \int x e^{2x} dx = PI = x \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} dx = x \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C.$$

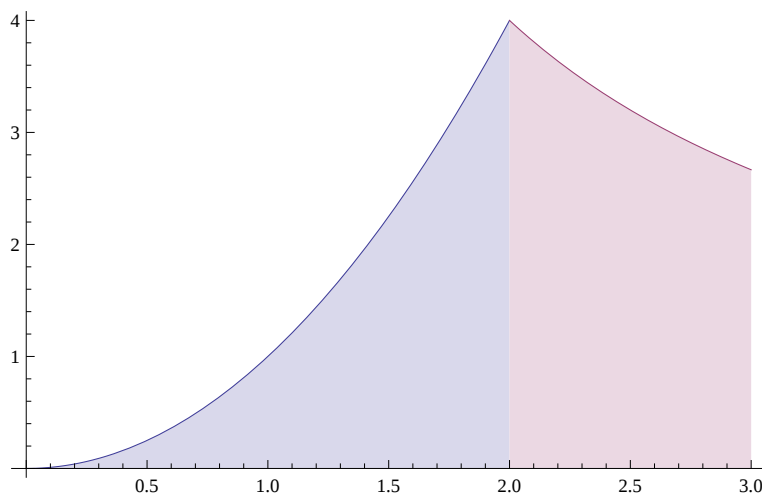
$$\text{b)} \int_1^2 \frac{x}{x^2 + 3x + 2} dx = PBU = \int_1^2 \left(\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1} \right) dx = [2 \ln(x+2) - \ln(x+1)]_1^2 = 5 \ln 2 - 3 \ln 3$$

$$\text{c)} \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \{t = \sqrt{x}, dx = 2t dt\} = \int 2 \sin t dt = -2 \cos t + C = 2 - 2 \cos \sqrt{x} + C$$

2. Beräkna arean av det område som begränsas av kurvorna $y = x^2$ och $y = \frac{8}{x}$, x -axeln samt linjen $x = 3$. Rita figur! (5p)

Lösning:

En skiss över området som ska beräknas är enligt följande figur:



Vi får dela upp beräkningarna enligt

$$A = \int_0^2 x^2 dx + \int_2^3 \frac{8}{x} dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 + [8 \ln x]_2^3 = \frac{8}{3} + 8 \ln \frac{3}{2}.$$

3. Då dagsljuset tränger ner i en sjö avtar ljusets intensitet $I(x)$ med djupet x under vattenytan enligt Lamberts lag:

$$\frac{dI}{dx} = -kI$$

där k är en positiv konstant. Bestäm funktionen $I(x)$ om ljusintensiteten är $I(0) = I_0$ vid ytan och $I(1) = 0.4I_0$ på 1 meters djup. (5p)

Lösning:

Vi skriver (DE) som

$$I' + kI = 0$$

och löser den som en linjär (DE) av första ordningen. I.F. $e^{F(x)} = e^{kx}$. multiplicerar vi båda leden med e^{kx} får vi

$$I'e^{kx} + ke^{kx}I = 0 \Leftrightarrow (Ie^{kx})' = 0$$

Integrering av båda leden ger

$$Ie^{kx} = C \Leftrightarrow I(x) = Ce^{-kx}.$$

Vi har att $I(0) = I_0$ vilket ger oss $C = I_0$ och vi får då

$$I(x) = I_0e^{-kx}.$$

På 1 meters djup har vi att $I(1) = 0.4I_0$ vilket efter insättning ger oss

$$I_0e^{-k \cdot 1} = 0.4I_0 \Leftrightarrow e^{-k} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow k = -\ln \frac{2}{5}.$$

Sökt funktion blir då

$$I(x) = I_0e^{\ln \frac{2}{5} x} = I_0\left(\frac{2}{5}\right)^x.$$

4. Visa med induktion att $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \geq 1$. (5p)

Lösning:

Låt $U(n)$ vara utsagan $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \geq 1$.

I(induktionsstarten): Visa $U(1)$ sann.

$$VL_1 = \sum_{k=1}^1 k^2 = 1 \text{ och } HL_1 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = 1. \text{ Ok!}$$

II(induktionsantagandet): Antag $U(p)$ sann för något $p \geq 1$.

$$\sum_{k=1}^p k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$$

III: Visa att $U(p)$ sann $\Rightarrow U(p+1)$ sann.

$$\sum_{k=1}^{p+1} k^2 = \frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}$$

$$\begin{aligned} VL_{p+1} &= \sum_{k=1}^{p+1} k^2 = \sum_{k=1}^p k^2 + (p+1)^2 = (\text{ind. ant.}) = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} + (p+1)^2 = \frac{p(p+1)(2p+1) + 6(p+1)^2}{6} = \\ &= \frac{(p+1)(p(2p+1) + 6(p+1))}{6} = \frac{(p+1)(2p^2 + 7p + 6)}{6} = \frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6} = HL_{p+1}. \end{aligned}$$

Slutsats: Enligt induktionsprincipen följer att $U(n)$ är sann för alla $n \geq 1$.

5. Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} 2xyy' = 1 + y^2 \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad (5p)$

Lösning:

Separabel diff.ekv. och vi får då

$$\int \frac{2y}{1+y^2} dy = \int \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow \ln(1+y^2) = \ln x + C$$

$y(1) = 1$ ger $C = \ln 2$. Vi får då $\ln(1+y^2) = \ln x + \ln 2 = \ln(2x)$. Löser vi ut y ur ekvationen får vi att

$$y = \sqrt{2x - 1}.$$

6. Lös differentialekvationen $y''' + y' = x + 2$. (6p)

Lösning:

Karr.ekv. $p(r) = r^3 + r = 0$ har lösningarna $r_1 = 0$, $r_2 = j$, $r_3 = -j$. Den allmänna homogena lösningen blir då

$$y_h = C + A \cos x + B \sin x.$$

För partikulärlösningen antar vi ett polynom av grad 2.

$$y_p = ax^2 + bx + c$$

vilket ger

$$y_p' = 2ax + b, \quad y_p'' = 2a, \quad y_p''' = 0$$

Insättning i (DE) ger oss att $a = 1/2$ och $b = 2$. c väljes godtyckligt till 0. vi får då att

$$y_p = \frac{1}{2}x^2 + 2x.$$

Sammanfattningsvis får vi

$$y = C + A \cos x + B \sin x + \frac{1}{2}x^2 + 2x.$$

7. I en viss bakteriepopulation ändras antalet bakterier med en hastighet som är proportionell mot antalet bakterier. Man vet att vid tiden noll är antalet bakterier 1000 stycken och att efter 6 timmar har antalet bakterier fördubblats. Hur många bakterier finns det efter ett dygn? (6p)

Lösning:

Sätt $N(t)$ = antalet bakterier vid tiden t timmar. $\frac{dN}{dt}$ blir då antalet bakterier per timme. Vi får då följande differentialekvationen att lösa:

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

som har den allmänna lösningen

$$N(t) = Ce^{kt}.$$

Vi har att $N(0) = 1000$ vilket ger $C = 1000$ och vi får då

$$N(t) = 1000e^{kt}.$$

Vi har även att enligt texten att $N(6) = 2000$ vilket ger oss att $k = \frac{\ln 2}{6}$ och funktionen blir då

$$N(t) = 1000e^{\frac{\ln 2}{6}t}.$$

Antalet bakterier efter 24 timmar blir

$$N(24) = 1000e^{\frac{\ln 2}{6}24} = 1000e^{4\ln 2} = 1000e^{\ln 16} = 1000 \cdot 16 = 16000.$$

8. Härled lösningsformeln till en linjär differentialekvation av första ordningen d.v.s. en DE av typen $y' + f(x)y = g(x)$. (4p)

9. Formulera och bevisa formeln för en geometrisk summa. (4p)