Tentamensskrivning i matematik del E 20120604

Kurskod: LMA164
Examinator: Jonny Lindström tel. 0733 607040
Tid för tentamen: 08.30-12.30
Hjälpmedel: Inga

---

1. Beräkna följande integraler.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x}\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} x(1+x^2)\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^2 x+1}\,dx$ (10p)

Lösning:

a)

$$\int \frac{1}{x^2+x}\,dx = \int \frac{1}{x(x+1)}\,dx = PBU = \int (\frac{A}{x} + \frac{b}{x+1})\,dx = \int (\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1})\,dx$$
$$= \ln x - \ln(x+1) + C = \ln\frac{x}{x+1} + C$$

b) $$\int_1^{\sqrt{2}} x(1+x^2)\,dx = \left[\begin{array}{c|c} 1+x^2=t & x=1 \Rightarrow t=2 \\ 2x\,dx = dt & x=\sqrt{2} \Rightarrow t=3 \end{array}\right] = \int_2^3 \frac{1}{2}t\,dt = \left[\frac{t^2}{4}\right]_2^3 = \frac{9}{4} - \frac{4}{4} = \frac{5}{4}.$$

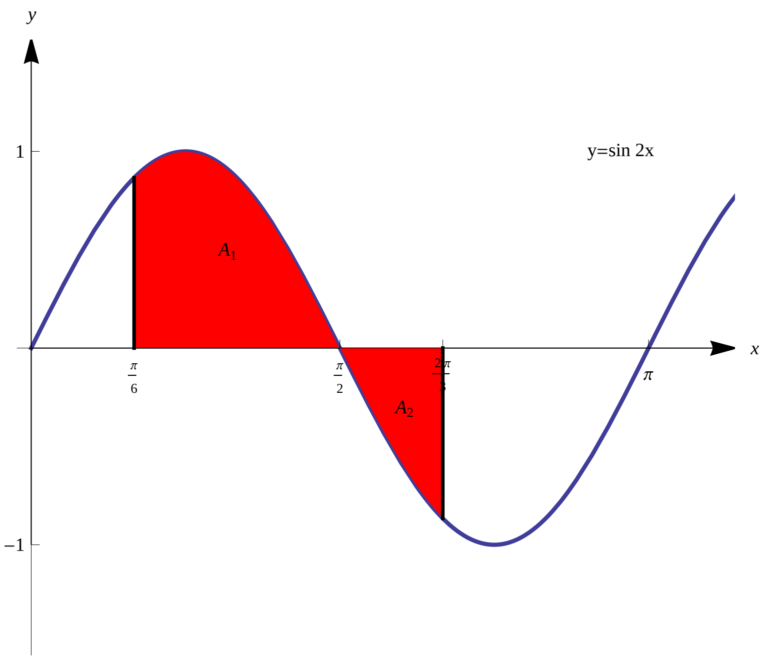
c)

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x+1}\,dx = \{t=\cos x,\ dt = -\sin x\,dx\} = -\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = -\arctan t + C$$
$$= -\arctan(\cos x) + C$$

2. Beräkna arean av det område som begränsas av kurvan $y = \sin 2x$, positiva $x-$ axeln och de vertikala linjerna $x = \dfrac{\pi}{6}$ och $x = \dfrac{2\pi}{3}$. Rita figur! (5p)

Lösning:

En skiss över området som ska beräknas är enligt följande figur:



Vi får dela upp beräkningarna enligt

$$A = A_1 + A_2 = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin(2x)\,dx + (0 - \int_{\pi/2}^{2\pi/3} \sin(2x))\,dx = \left[\frac{-\cos(2x)}{2}\right]_{\pi/6}^{\pi/2} - \left[\frac{-\cos(2x)}{2}\right]_{\pi/2}^{2\pi/3}$$

$$= -(\frac{\cos\pi}{2} - \frac{\cos\frac{\pi}{3}}{2}) + \frac{\cos\frac{4\pi}{3}}{2} - \frac{\cos\pi}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$$

3. Antalet insekter P i en insektspopulation tillväxer enligt differentialekvationen

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

där t är tiden i dygn och k är en positiv konstant. Bestäm funktionen $P(t)$ om man vet att antalet insekter vid tiden $t = 0$ är 250 och att efter 2 dygn är antalet 1000. (5p)

Lösning:

Vi skriver (DE) som

$$P' - kP = 0$$

och löser den som en linjär (DE) av första ordningen. I.F $e^{F(t)} = e^{-kt}$. multiplicerar vi båda leden med e^{-kt} får vi

$$P'e^{-kt} - ke^{-kt}P = 0 \Leftrightarrow (Pe^{-kt})' = 0$$

Integrering av båda leden ger

$$Pe^{-kt} = C \Leftrightarrow P(t) = Ce^{kt}.$$

Vi har att $P(0) = 250$ vilket ger oss $C = 250$ och vi får då

$$P(t) = 250e^{kt}.$$

Efter 2 dygn har vi att $P(2) = 1000$ vilket efter insättning ger oss

$$250e^{k\cdot 2} = 1000 \Leftrightarrow e^{2k} = 4 \Leftrightarrow k = \frac{2\ln 2}{2} = \ln 2.$$

Sökt funktion blir då

$$P(t) = 250(e^{\ln 2})^t = 250 \cdot 2^t.$$

4. Visa med induktion att $1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}, \; n \geq 1.$ (5p)

Lösning:

Låt $U(n)$ vara utsagan $1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}, \; n \geq 1.$

I(induktionsstarten): Visa $U(1)$ sann.

$VL_1 = 3 \cdot 1 - 2 = 1$ och $HL_1 = \dfrac{1(3\cdot 1 - 1)}{2} = 1$. Ok!

II(induktionsantagandet): Antag $U(p)$ sann för något $p \geq 1$.

$$1 + 4 + 7 + ... + (3p - 2) = \frac{p(3p-1)}{2}$$

III: Visa att $U(p)$ sann $\Rightarrow U(p+1)$ sann.

$$1 + 4 + 7 + ... + (3p - 2) + (3p + 1) = \frac{(p+1)(3p+2)}{2}$$

$$\begin{aligned} VL_{p+1} &= 1 + 4 + 7 + ... + (3p-2) + (3p+1) = (\text{ind.ant.}) = \frac{p(3p-1)}{2} + (3p+1) \\ &= \frac{p(3p-1) + 2(3p+1)}{2} = \frac{3p^2 + 5p + 2}{2} = \frac{(p+1)(3p+2)}{2} \\ &= HL_{p+1}. \end{aligned}$$

Slutsats: Enligt induktionsprincipen följer att $U(n)$ är sann för alla $n \geq 1$.

5. Lös differentialekvationen $y'' - y' - 2y = 2x^2 + 2x + 4$. (6p)

Lösning:

Karr.ekv. $r^2 - r - 2 = 0$ har lösningarna $r_1 = -1, \; r_2 = 2$. Den allmänna homogena lösningen blir då

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

För partikulärlösningen ansätter vi ett polynom av grad 2.

$$y_p = ax^2 + bx + c$$

vilket ger

$$y_p' = 2ax + b,\ y_p'' = 2a$$

Insättning i (DE) ger oss att $a = -1$ och $b = 0$ och $c = -3$. Vi får då att

$$y_p = -x^2 - 3.$$

Sammanfattningsvis får vi

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} - x^2 - 3.$$

6. Lös begynnelsevärdesproblemet $\begin{cases} y' = (y^2-1)x^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$ (5p)

Lösning:

Separabel diff.ekv. och vi får då

$$\int \frac{1}{y^2-1}\,dy = \int x^2\,dx.$$

Vi har att

$$\frac{1}{y^2-1} = [PBU] = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-1} = \frac{1/2}{y-1} - \frac{1/2}{y+1}$$

och får då

$$\int \frac{1}{2}(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1})\,dy = \int x^2\,dx$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}(\ln|y-1| - \ln|y+1)| = \frac{x^3}{3} + C_1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\ln|\frac{y-1}{y+1}| = \frac{2}{3}x^3 + C_2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{y-1}{y+1} = C\,e^{\frac{2}{3}x^3}$$

som har lösningen

$$y(x) = \frac{1 + Ce^{\frac{2}{3}x^3}}{1 - Ce^{\frac{2}{3}x^3}}.$$

Bivillkoret $y(0) = 2$ ger $C = \dfrac{1}{3}$ och vi får slutligen att

$$y(x) = \frac{3 + e^{\frac{2}{3}x^3}}{3 - e^{\frac{2}{3}x^3}}.$$

7. I ett nyvädrat rum med volymen 120 m^3 börjar några personer att röka. Röken sprider sig i en takt av 0.01 m^3/min och den välblandade rökluften lämnar rummet i samma takt och ersätts med ren luft genom ventilation med samma takt 0.01 m^3/min. Röken innehåller 4 % av den hälsovådliga gasen CO. Bestäm halten av gasen CO som funktion av tiden. Efter hur lång tid nås det hälsovådliga värdet 0.012 %? (4p)

Lösning:

Låt $y(t)$ vara koncentrationen (i procent) koloxid (CO) i rummet t min efter det att personerna börjat röka. Vi vet då att $y(0) = 0$. Förändringshastigheten för $y(t)$ (dvs. derivatan) är differensen mellan tillskott och bortfall.
Tillskottet från rökandet är $\dfrac{0.01 \cdot 0.04}{120}$ procentenheter per minut, och
bortfallet p.g.a. ventilation är $\dfrac{0.01\,y(t)}{120}$ procentenheter per minut.
Detta ger oss begynnelsevärdesproblemet;

$$y'(t) = \frac{0.01 \cdot 0.04}{120} - \frac{0.01\,y(t)}{120} \quad , \quad y(0) = 0$$

Differentialekvationen är linjär och kan skrivas;

$$y'(t) + \frac{1}{12000}y(t) = \frac{0.04}{12000} \qquad (DE)$$

Den integrerande faktorn är $e^{\int \frac{1}{12000}\,dt} = e^{\frac{t}{12000}}$ så ;

$$(DE) \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dt}\left(e^{\frac{t}{12000}}y(t)\right) = \frac{0.04}{12000}e^{\frac{t}{12000}} \;\Leftrightarrow$$

$$e^{\frac{t}{12000}}y(t) = 0.04\,e^{\frac{t}{12000}} + C \;\Leftrightarrow\; y(t) = 0.04 + Ce^{\frac{-t}{12000}}$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = 0$ ger sedan att $C = -0.04$ så

$$y(t) = 0.04(1 - e^{\frac{-t}{12000}})$$

Vi vill nu också bestämma den tidpunkt T för vilket koloxidhalten $y(t)$ nått den farliga nivån 0.00012;

$$0.04(1 - e^{\frac{-T}{12000}}) = 0.00012 \;\Leftrightarrow\; 1 - e^{\frac{-T}{12000}} = 0.003 \;\Leftrightarrow$$

$$e^{\frac{-T}{12000}} = 0.997 \;\Leftrightarrow\; T = -12000\,\ln 0.997$$

Svar: Halten koloxid t minuter efter det att personerna börjat röka är $0.04\,(1 - e^{\frac{-t}{12000}})$ och efter $-12000\,\ln 0.997$ (≈ 36) minuter så har halten nått den hälsovådliga nivån.

8. Bevisa areaformeln, $A = \displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\;dx$. (4p)

9. Formulera och bevisa formeln för en aritmetisk summa. (4p)