

Lösningar till problemtentamen i Algebra för DAI1 m fl den 2009-01-14.

1.a) Härled formeln $\sin(3v) = 3\sin v - 4\sin^3 v$ med hjälp av

Moivres formel $(e^{jv})^n = e^{jnv}$ i fallet $n = 3$. (3p)

Lösning: $n = 3$ insatt i Moivres formel ger

$$\begin{aligned} HL = e^{j3v} &= \cos(3v) + j\sin(3v) = VL = (\cos v + j\sin v)^3 = \\ &= (\cos v)^3 + 3 \cdot (\cos v)^2 \cdot j\sin v + 3 \cdot \cos v \cdot (j\sin v)^2 + (j\sin v)^3 = \\ &= \cos^3 v - 3\cos v \sin^2 v + j(3\cos^2 v \sin v - \sin^3 v) \end{aligned}$$

Identifikation av real- och imaginärdelar ger **formlerna för trefaldiga vinkeln**

$$\text{Re} : \cos(3v) = \cos^3 v - 3\cos v \sin^2 v \quad \text{Im} : \sin(3v) = 3\cos^2 v \sin v - \sin^3 v$$

och med hjälp av trigonometriska ettan får vi att

$$\sin(3v) = 3\cos^2 v \sin v - \sin^3 v = 3(1 - \sin^2 v)\sin v - \sin^3 v = 3\sin v - 4\sin^3 v \quad \text{VSH}$$

b) Lös ekvationen $z^2 + (2 + j2)z - 3 - j2 = 0$. (5p)

Lösning:

Kvadratkomplettering ger

$$z^2 + (2 + j2)z - 3 - j2 = (z + 1 + j)^2 - (1 + j)^2 - 3 - j2 = 0 \Leftrightarrow (z + 1 + j)^2 = (1 + j)^2 + 3 + j2$$

Sätt: $z + 1 + j = u + jv$. Utveckling av de båda leden i ekvationen ger

$$VL = (z + 1 + j)^2 = (u + jv)^2 = u^2 + j2uv + j^2v^2 = u^2 - v^2 + j2uv$$

$$HL = (1 + j)^2 + 3 + j2 = 1 + j2 + j^2 + 3 + j2 = 1 + j2 - 1 + 3 + j2 = 3 + j4$$

$$VL = HL \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 - v^2 = 3 \\ 2uv = 4 \Rightarrow v = \frac{2}{u} \end{cases}$$

Insättning av $v = \frac{2}{u}$ i $u^2 - v^2 = 3$ ger

$$u^2 - \left(\frac{2}{u}\right)^2 = 3 \Leftrightarrow u^4 - \frac{4}{u^2} = 3. \text{ Multiplikation av båda leden med } u^2 \text{ ger}$$

$$u^4 - 4 = 3u^2 \Leftrightarrow u^4 - 3u^2 - 4 = 0. \text{ Sätter vi } t = u^2 \text{ får vi andragradsekvationen}$$

$$t^2 - 3t - 4 = 0 \text{ som har rötterna } t_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$$

Fall 1. $u^2 = t_1 = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow u_{1,2} = \pm 2$ varav $v_1 = \frac{2}{u_1} = 1$; $v_2 = \frac{2}{u_2} = -1$

Fall 2. $u^2 = t_2 = -\frac{2}{2} = -1 < 0$ vilket är orimligt, ty u är reellt.

$z + 1 + j = u + jv \Leftrightarrow z = u + jv - 1 - j = u - 1 + j(v - 1)$ ger slutligen att

SVAR:
$$\begin{cases} z_1 = u_1 - 1 + j(v_1 - 1) = 2 - 1 + j(1 - 1) = 1 \\ z_2 = u_2 - 1 + j(v_2 - 1) = -2 - 1 + j(-1 - 1) = -3 - j2 \end{cases}$$

Anm. Då vi löste ut u enligt $2uv = 4 \Rightarrow v = \frac{2}{u}$ har vi antagit att $u \neq 0$.

Att u inte kan vara 0 beror på att vi, i likheten $2uv = 4$ för $u = 0$, skulle få att $VL = 2uv = 2 \cdot 0 \cdot v = 0$ och att $HL = 4 \neq 0$ vilket är orimligt.

2. Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 3 \\ x + 2y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

approximativt i minsta kvadratmetodens mening och beräkna medelfelet.

(5p)

Lösning:

(ES)
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 3 \\ x + 2y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$$
 kan skrivas som matrisekvationen
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Bästa lösningen i minsta kvadratmetodens mening erhålles ur

(ESU)
$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ varav}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{b}) = \frac{1}{33} \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{33} \begin{bmatrix} 44 \\ -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{Felvektorn } \mathbf{f} = \mathbf{Ax} - \mathbf{b} = \begin{bmatrix} x + y - 1 \\ 2x + y - 3 \\ x + 2y \\ x - y - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} - \frac{1}{3} - \frac{3}{3} \\ \frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{9}{3} \\ \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} + \frac{1}{3} - \frac{3}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

varför medelfelet blir

$$\eta = \frac{|\mathbf{f}|}{\sqrt{m}} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2+1^2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,58 \quad \text{SVAR: } \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases} \text{ och } \eta = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,58$$

3. Låt L vara linjen $x = y - 2 = \frac{z-3}{2}$, låt Π_1 vara planet $2x + y - 2z - 7 = 0$

och låt Π_2 vara planet $x + \frac{1}{2}y - z - \frac{3}{2} = 0$.

a) Beräkna vinkeln mellan linjen L och planet Π_1 . (2p)

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{|\mathbf{v} \bullet \mathbf{n}_1|}{|\mathbf{v}| |\mathbf{n}_1|} = \arcsin \frac{|\mathbf{v} \bullet \mathbf{n}_1|}{|\mathbf{v}| |\mathbf{n}_1|} = \arcsin \frac{|(1,1,2) \bullet (2, 1, -2)|}{|(1,1,2)| |(2, 1, -2)|} = \arcsin \frac{1}{3\sqrt{6}}$$

$$\text{SVAR: } \theta = \arcsin \frac{1}{3\sqrt{6}} \approx 8^\circ$$

b) I vilken punkt skär linjen L planet Π_1 ? (2p)

$$x = y - 2 = \frac{z-3}{2} = t \Rightarrow L: \mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 2+t \\ 3+2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Skärningspunkten för L och Π_1 och erhålles genom att kombinera linjens och planets ekvationer. Insättning av ekv. för L i ekv. för Π_1 ger:

$$2x + y - 2z - 7 = 0 \Leftrightarrow 2t + 2 + t - 2(3 + 2t) - 7 = 0 \Leftrightarrow -t = 11 \Leftrightarrow t = -11$$

$$\text{SVAR: } S = (t; 2+t; 3+2t) = (-11; -9; -19)$$

c) Visa att planen Π_1 och Π_2 är parallella. (1p)

$$\mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{n}_1 \Rightarrow \mathbf{n}_2 \parallel \mathbf{n}_1 \Rightarrow \Pi_2 \parallel \Pi_1$$

d) Bestäm en punkt som ligger i planet Π_2 . (0,5p)

$x = z = 0$ insatt i $x + \frac{1}{2}y - z - \frac{3}{2} = 0$ ger att $y = 3$ varför $(0; 3; 0)$ är en punkt i planet $x + \frac{1}{2}y - z - \frac{3}{2} = 0$.

e) Beräkna avståndet mellan planen Π_1 och Π_2 . (1,5p)

Insättning av punkten från **d** i avståndsformeln för Π_1 ger det sökta avståndet.

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2x_1 + y_1 - 2z_1 - 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{|2 \cdot 0 + 3 - 2 \cdot 0 - 7|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|-4|}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3} \text{ le}$$

SVAR: $d = \frac{4}{3} \text{ le}$

f) Punkten P ligger på linjen L och har lika stort avstånd till båda planen.
Beräkna koordinaterna för P. (3p)

Avståndet d från Π_1 till en godtycklig punkt på L ges av

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2x_1 + y_1 - 2z_1 - 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{|2t + 2 + t - 2(3 + 2t) - 7|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|t + 11|}{3} \text{ le}$$

$$d(\Pi_1, P) = \frac{|t + 11|}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \Rightarrow |t + 11| = 2 \Rightarrow t + 11 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -9 \\ t_2 = -13 \end{cases} \text{ varav}$$

$$P_1 = (t_1; 2 + t_1; 3 + 2t_1) = (-9; -7; -15) \text{ och } P_2 = (t_2; 2 + t_2; 3 + 2t_2) = (-13; -11; -23)$$

$$d(\Pi_2, P_1) = \frac{|-9 + \frac{1}{2}(-7) - (-15) - \frac{3}{2}|}{\sqrt{1^2 + (\frac{1}{2})^2 + (-1)^2}} = \frac{|1|}{\sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$d(\Pi_2, P_2) = \frac{|-13 + \frac{1}{2}(-11) - (-23) - \frac{3}{2}|}{\sqrt{1^2 + (\frac{1}{2})^2 + (-1)^2}} = \frac{|3|}{\sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{3}{\frac{3}{2}} = 2$$

SVAR: $P = (-9; -7; -15)$

4. Låt $\mathbf{M}$ vara matrisen
$$\begin{bmatrix} 1 & p+2 & p+2 \\ 2 & p+3 & p+3 \\ 4 & 2p+6 & 2p+6 \\ 1 & p^2+p+1 & p^2+p+1 \end{bmatrix}.$$

Bestäm rangen av $\mathbf{M}$ för alla värden på den reella parametern p .

(4p)

Lösning:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} 1 & p+2 & p+2 \\ 2 & p+3 & p+3 \\ 4 & 2p+6 & 2p+6 \\ 1 & p^2+p+1 & p^2+p+1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \boxed{-2} \quad \boxed{-4} \quad \boxed{-1} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & p+2 & p+2 \\ 0 & -p-1 & -p-1 \\ 0 & -2p-2 & -2p-2 \\ 0 & p^2-1 & p^2-1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \boxed{-1} \\ \boxed{-1} \end{array} \sim \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & p+2 & p+2 \\ 0 & p+1 & p+1 \\ 0 & 2p+2 & 2p+2 \\ 0 & p^2-1 & p^2-1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \boxed{\frac{1}{p+1}} \\ \boxed{\frac{1}{2p+2}} \\ \boxed{\frac{1}{p+1}} \end{array} p \neq -1 \sim \begin{bmatrix} 1 & p+2 & p+2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & p+1 & p+1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \boxed{-1} \quad \boxed{-p-1} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & p+2 & p+2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Fall 1. $\text{rang} \mathbf{M} = 2$ då $p \neq -1$

$$\mathbf{M} \sim \begin{bmatrix} 1 & p+2 & p+2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fall 2. $\text{rang} \mathbf{M} = 1$ då $p = -1$

$$\mathbf{M} \sim \begin{bmatrix} 1 & p+2 & p+2 \\ 0 & p+1 & p+1 \\ 0 & 2p+2 & 2p+2 \\ 0 & p^2-1 & p^2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

SVAR: $\text{rang} \mathbf{M} = \begin{cases} 1 & \text{för } p = -1 \\ 2 & \text{för } p \neq -1 \end{cases}$