

Lösningar till Problemtentamen i Algebra för DAI1 m fl, den 2010-01-13.**Tid:** kl 14.00 - 18.00 **Hjälpmedel:** Chalmersgodkänd (typgodkänd) räknedosa.**Examinator:** Håkan Blomqvist

1. Beräkna $\operatorname{Im} z$, $|z|$ och $\arg z$ för det komplexa talet $z = \frac{1+j}{2+j} + \frac{1}{j}$. (2p)

LÖSNING:

$$\frac{1+j}{2+j} + \frac{1}{j} = \frac{(1+j)(2-j)}{(2+j)(2-j)} + \frac{1(-j)}{j(-j)} = \frac{2-j+j2-j^2}{2^2-j^2} + \frac{-j}{-j^2} = \frac{3+j}{5} - \frac{j5}{5} = \frac{3}{5} - j\frac{4}{5}$$

SVAR: $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im}\left\{\frac{3}{5} + j\left(-\frac{4}{5}\right)\right\} = -\frac{4}{5}$, $|z| = \left|\frac{3}{5} - j\frac{4}{5}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{25}} = 1$,

$$\arg z = \arctan \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\arctan \frac{4}{3} \approx -53^\circ$$

2. Låt ES vara ekvationssystemet
$$\begin{cases} 2x + y + kz = k^2 + 1 \\ 3x + y - 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}.$$

a) Beräkna $\det \mathbf{A}$, för $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & k \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, dvs $\mathbf{A}$ är koefficientmatrisen till ES,

och avgör, med hjälp av resultatet, för vilka värden på k som $\mathbf{A}$ är inverterbar. (1p)

LÖSNING:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & k \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 5 + k \cdot 5 = 5(k+1)$$

SVAR: $\mathbf{A}^{-1}$ existerar $\Leftrightarrow \det \mathbf{A} \neq 0 \Leftrightarrow 5(k+1) \neq 0 \Leftrightarrow k \neq -1$

b) Beräkna x med Cramers regel, för de k -värden för vilka detta är möjligt. (1p)

LÖSNING:

$$\det \mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} k^2+1 & 1 & k \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (k^2+1) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5k^2 + 5k = 5k(k+1)$$

SVAR: $x = \frac{\det \mathbf{A}_1}{\det \mathbf{A}} = \frac{5k(k+1)}{5(k+1)} = k$ för $k \neq -1$.

c) Bestäm rangen av $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & k & k^2+1 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, dvs $\mathbf{M}$ är totalmatrisen för ES. (2p)

LÖSNING:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & k & k^2+1 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\leftarrow \\ \leftarrow}} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & k & k^2+1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\boxed{-3} \quad \boxed{-2} \\ \leftarrow \\ \leftarrow}} \sim \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & k-2 & k^2-1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\boxed{-1/5}} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & k-2 & k^2-1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\leftarrow \\ \boxed{-2} \quad \boxed{3} \\ \leftarrow}} \sim \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 & k^2-1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{k \neq -1 \\ \boxed{-1/(k+1)}}} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k-1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

SVAR: Fall 1: $k \neq -1$. rang $\mathbf{M} = 3$.

Fall 2: $k = -1$. rang $\mathbf{M} = 2$.

$$\mathbf{M} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k-1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d) Lös ES för $k = -1$.

(1p)

LÖSNING:

$$\mathbf{M} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ varav } \begin{cases} x - z = 1 \\ y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{SVAR: } k = -1 \text{ ger att } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$$

3 Anpassa med minsta kvadratmetoden en kurva av typen $y = a\sqrt{x} + b$ till punkterna (1; 1), (4; 3), och (16; 14). Beräkna även medelfelet.

(4p)

LÖSNING:

Insättning av punkternas koordinater ger

$$(\text{ES}) \begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 3 \\ 4a + b = 14 \end{cases} \text{ eller på matrisform } \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 14 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 7 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{A}^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Bästa lösningen i minsta kvadratmetodens mening erhålles som lösning till

$$(\text{ESU}) \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 21 & 7 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 63 \\ 18 \end{bmatrix} \text{ varav}$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{b}) = \frac{1}{21 \cdot 3 - 7 \cdot 7} \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -7 & 21 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 63 \\ 18 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 63 \\ -63 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ -\frac{9}{2} \end{bmatrix} \text{ och}$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + b - 1 \\ 2a + b - 3 \\ 4a + b - 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} - \frac{9}{2} - \frac{2}{2} \\ \frac{18}{2} - \frac{9}{2} - \frac{6}{2} \\ \frac{36}{2} - \frac{9}{2} - \frac{28}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

varför medelfelet

$$\eta = \frac{|\mathbf{f}|}{\sqrt{m}} = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-1)^2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{14}}{2\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{7}{6}} \approx 1,08$$

SVAR: $y = \frac{9}{2}\sqrt{x} - \frac{9}{2}$ och $\eta = \sqrt{\frac{7}{6}} \approx 1,08$

4. I ett ONH-system är punkterna $A = (1; 1; 1)$, $B = (3; 3; 2)$, $C = (3; 4; 5)$

och linjen L: $x = y - 2 = \frac{z-3}{2}$ givna.

a) Bestäm ekvationen för det plan som innehåller punkterna A, B och C. (2,5p)

LÖSNING:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \mathbf{e}_x - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \mathbf{e}_y + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_z = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Planets normalvektor är parallell med $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Välj t ex $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{r}_o = \overrightarrow{OA}$.

Planets ekvation blir då

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5(x-1) - 6(y-1) + 2(z-1) = 0$$

SVAR: $5x - 6y + 2z - 1 = 0$

b) Bestäm avståndet från punkten B till linjen L. (2,5p)

LÖSNING:

$$L: x = y - 2 = \frac{z-3}{2} = t \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 + t \cdot 1 \\ y = 2 + t \cdot 1 \\ z = 3 + t \cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{r} = \mathbf{r}_o + t \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OB} \Rightarrow \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_o = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ och det följer att}$$

$$\mathbf{v} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_o) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_x \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \mathbf{e}_y \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \mathbf{e}_z \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Avståndsformeln för räta linjen ger slutligen att

$$\mathbf{SVAR:} \quad d(B, L) = \frac{|\mathbf{v} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_o)|}{|\mathbf{v}|} = \frac{\sqrt{(-3)^2 + 7^2 + (-2)^2}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{62}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{31}{3}} \text{ le}$$

- c) Punkten E ligger på linjen L. Bestäm koordinaterna för E så att alla koordinater för E blir positiva och att vinkeln mellan vektorerna $\overrightarrow{AB}$ och $\overrightarrow{AE}$ blir $\arccos \frac{4}{5}$. (4p)

LÖSNING:

$E = (t; 2+t; 3+2t)$. Alla koordinater för E blir positiva om

$$(t > 0) \wedge (2+t > 0) \wedge (3+2t > 0) \Leftrightarrow (t > 0) \wedge (t > -2) \wedge (t > -\frac{3}{2}) \Leftrightarrow t > 0$$

Skalarprodukten definition ger att $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AE} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AE}| \cos \theta$, där

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AE} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0+t-1 \\ 2+t-1 \\ 3+2t-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} t-1 \\ t+1 \\ 2t+2 \end{bmatrix} = 2 \cdot (t-1) + 2 \cdot (t+1) + 1 \cdot (2t+2) = 6t+2$$

och

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3, \quad |\overrightarrow{AE}| = \sqrt{(t-1)^2 + (t+1)^2 + (2t+2)^2} = \sqrt{6t^2 + 8t + 6}$$

varav

$$2(3t+1) = 3\sqrt{6t^2 + 8t + 6} \cdot \frac{4}{5} \Leftrightarrow 5(3t+1) = 6\sqrt{6t^2 + 8t + 6}$$

Kvadrering av båda leden ger att

$$25(9t^2 + 6t + 1) = 36(6t^2 + 8t + 6) \Leftrightarrow 225t^2 + 150t + 25 = 216t^2 + 288t + 216 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9t^2 - 138t - 191 = 0 \Leftrightarrow t^2 - \frac{46}{3}t - \frac{191}{9} = 0 \Leftrightarrow t_{1,2} = \frac{23}{3} \pm \sqrt{\frac{23^2 + 191}{9}} = \frac{23}{3} \pm 4\sqrt{5}$$

$$t_2 = \frac{23}{3} - 4\sqrt{5} < \frac{24}{3} - 4\sqrt{4} = 8 - 8 = 0 \text{ förkastas!}$$

SVAR: $E = (t; 2+t; 3+2t) = (\frac{23}{3} + 4\sqrt{5}; \frac{29}{3} + 4\sqrt{5}; \frac{55}{3} + 8\sqrt{5})$

5.a) Visa att $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ och att $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ genom att tillämpa

Moivres formel $(e^{jv})^n = e^{jnv}$ för $n = 2$ och $v = \frac{\pi}{8}$. (2p)

LÖSNING:

$n = 2$ och $v = \frac{\pi}{8}$ insatt i Moivres formel ger

$$\begin{aligned} HL &= e^{j2 \cdot \frac{\pi}{8}} = e^{j\frac{\pi}{4}} = \cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}} = \\ &= VL = (\cos \frac{\pi}{8} + j \sin \frac{\pi}{8})^2 = \cos^2 \frac{\pi}{8} + j2 \cos \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

Identifikation av realdelarna ger

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos^2 \frac{\pi}{8} - (1 - \cos^2 \frac{\pi}{8}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{8} = (\pm) \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \text{ (Vinkeln i 1:a kvadranten.)}$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{8} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{8} = 1 - \frac{2 + \sqrt{2}}{4} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{8} = (\pm) \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

b) Lös ekvationen $z^4 - 2\sqrt{2}z^2 + 4 = 0$. (5p)

(Svaret i **5b** skall ges på formen $x + jy$ och får inte innehålla trigonometriska uttryck. Resultatet i **5a** får användas även om **5a** ej är löst.)

LÖSNING:

Kvadratkomplettering ger

$$z^4 - 2\sqrt{2}z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z^4 - 2\sqrt{2}z^2 + (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - \sqrt{2})^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z^2 - \sqrt{2})^2 = -2 = j^2 2 \Leftrightarrow (z^2 - \sqrt{2})^2 = (\pm j\sqrt{2})^2$$

Fall 1. $z^2 - \sqrt{2} = j\sqrt{2} \Leftrightarrow z^2 = \sqrt{2}(1 + j)$

$$VL = z^2 = (re^{jv})^2 = r^2 e^{j2v} = HL = \sqrt{2}(1 + j) = \sqrt{2}\sqrt{2}e^{j(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)} = 2e^{j(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)} \text{ varav}$$

$$\begin{cases} r^2 = 2 & \Rightarrow r = \sqrt{2} \\ 2v = \frac{\pi}{4} + 2k\pi & \Rightarrow v = \frac{\pi}{8} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow z = \sqrt{2}e^{j(\frac{\pi}{8} + k\pi)} = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{8}}e^{jk\pi} \text{ för } k = 0, 1.$$

Fall 2. $z^2 - \sqrt{2} = -j\sqrt{2} \Leftrightarrow z^2 = \sqrt{2}(1 - j)$

$$z = \sqrt{2}e^{j\left(-\frac{\pi}{8} + \ell\pi\right)} = \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{8}}e^{j\ell\pi} \text{ f\"ur } \ell = 0, 1.$$

$$\begin{cases} z_{1,2} = \sqrt{2}e^{j\left(\pm\frac{\pi}{8}\right)}e^{j0\pi} = \sqrt{2}e^{\pm j\frac{\pi}{8}} = \sqrt{2}(\cos(\pm\frac{\pi}{8}) + j\sin(\pm\frac{\pi}{8})) = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{8} \pm j\sin\frac{\pi}{8}) \\ z_{3,4} = \sqrt{2}e^{j\left(\pm\frac{\pi}{8}\right)}e^{j1\pi} = \sqrt{2}e^{\pm j\frac{\pi}{8}}(\cos\pi + j\sin\pi) = -\sqrt{2}e^{\pm j\frac{\pi}{8}} = -\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{8} \pm j\sin\frac{\pi}{8}) \end{cases}$$

SVAR: $z_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \pm j\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right) = \pm\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} \pm j\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}\right)$