

Lösningar till problemtentamen i Algebra för DAI1, DEI1 m fl den 2009-10-23.

1. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} x+2y = 3 \\ 3x+6y = 5 \end{cases}$ approximativt med minsta kvadratmetoden.

(Medelfelet behöver ej beräknas.)

(2p)

Lösning:

$$(\text{ES}) \begin{cases} x+2y = 3 \\ 3x+6y = 5 \end{cases} \text{ skrivs på matrisform } \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 20 & 40 \end{bmatrix}, \mathbf{A}^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 36 \end{bmatrix}$$

Bästa lösningen i minsta kvadratmetodens mening erhålles som lösning till

$$(\text{ESU}) \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 20 & 40 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 18 \\ 36 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 10 & 20 \\ 20 & 40 \end{vmatrix} = 10 \cdot 40 - 20 \cdot 20 = 0 \Rightarrow (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \text{ existerar ej!}$$

$$\mathbf{M} = [\mathbf{A}|\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 18 \\ 20 & 40 & 36 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} \frac{1}{10} \end{bmatrix}} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{9}{5} \\ 20 & 40 & 36 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} -20 \end{bmatrix}} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{varav } \begin{cases} x+2y = \frac{9}{5} \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{5} - 2t \\ y = t \end{cases}$$

$$\text{SVAR: } \begin{cases} x = \frac{9}{5} - 2t \\ y = t \end{cases}$$

2. Låt $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a) Beräkna $(\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1}$. (1p)

b) Lös matrisekvationen $\mathbf{XA} + \mathbf{X} = \mathbf{B}^T$. (1p)

Lösning:

Jacobis metod för matrisinvertering ger att

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} + \mathbf{E} | \mathbf{E}] &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \boxed{-2} & \boxed{-3} \\ \leftarrow & \leftarrow \\ \leftarrow & \leftarrow \end{matrix} \sim \\ \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \boxed{-1} \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow & \boxed{-2} & \boxed{5} \\ \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow \end{matrix} \sim \\ \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \boxed{-1} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 7 & 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{E} | (\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1}] \end{aligned}$$

SVAR: $(\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & -1 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

2.b) Lös matrisekvationen $\mathbf{XA} + \mathbf{X} = \mathbf{B}^T$.

$$\mathbf{XA} + \mathbf{X} = \mathbf{B}^T \Leftrightarrow \mathbf{XA} + \mathbf{XE} = \mathbf{B}^T \Leftrightarrow \mathbf{X}(\mathbf{A} + \mathbf{E}) = \mathbf{B}^T \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{X}(\mathbf{A} + \mathbf{E})(\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1} = \mathbf{B}^T(\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{B}^T(\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1}$$

$$\text{typ} \mathbf{X} = \text{typ}(\mathbf{B}^T(\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1}) = \text{typ} \mathbf{B} \text{typ}(\mathbf{A} + \mathbf{E}) = (1 \times 3)(3 \times 3) = 1 \times 3$$

SVAR: $\mathbf{X} = \mathbf{B}^T(\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & -1 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

3. Låt $z = \frac{(-1 + j\sqrt{3})^{107}}{(j4)^{53}}$.

a) Beräkna $|z|$ och $\arg z$. (3p)

b) Skriv z på rektangulär form $x + jy$. (1p)

(Svaret i **2b** får inte innehålla några trigonometriska uttryck.)

Lösning:

a) $z_1 = x_1 + jy_1 = -1 + j\sqrt{3} = r_1 e^{j\varphi_1}$ där

$$\begin{cases} r_1 = |z_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2 \\ \varphi_1 = \arg z_1 = (x < 0) = \pi + \arctan \frac{y_1}{x_1} = \pi + \arctan \frac{\sqrt{3}}{-1} = \pi - \arctan \sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$z_2 = x_2 + jy_2 = 0 + j4 = r_2 e^{j\varphi_2} = 4e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$\begin{aligned} \frac{(-1 + j\sqrt{3})^{107}}{(j4)^{53}} &= \frac{(2e^{j\frac{2\pi}{3}})^{107}}{(2^2 e^{j\frac{\pi}{2}})^{53}} = 2^{107-2\cdot 53} e^{j(107\cdot\frac{2\pi}{3} - 53\cdot\frac{\pi}{2})} = 2^1 e^{j\frac{269\pi}{6}} = 2e^{j(\frac{264\pi}{6} + \frac{5\pi}{6})} = \\ &= 2e^{j(44\pi + \frac{5\pi}{6})} = 2e^{j(22\cdot 2\pi + \frac{5\pi}{6})} = 2e^{j\frac{5\pi}{6}} \quad \textbf{SVAR: } |z| = 2, \arg z = \frac{5\pi}{6} \end{aligned}$$

b) $z = 2e^{j(\frac{3\pi}{6} + \frac{2\pi}{6})} = 2e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} = 2(\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2})(\cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3}) = 2j(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\sqrt{3} + j$

4. Ekvationen $2z^4 - 6z^3 - z^2 - 25 = 0$ har en icke-reell rot av typen $a + j3a$,
dvs en rot vars imaginärdel är tre gånger så stor som realdelen. Lös ekvationen. (5p)

Lösning:

Sätt $P(z) = 2z^4 - 6z^3 - z^2 - 25$. Enligt satsen om komplexkonjugerade rötter gäller att

$$\left. \begin{array}{l} P(z) \text{ har reella koefficienter} \\ z_1 = a + j3a \text{ är rot till } P(z) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow z_2 = \bar{z}_1 = a - j3a \text{ är rot till } P(z) = 0.$$

$P(z)$ har alltså faktorn

$$(z - z_1)(z - z_2) = (z - a - j3a)(z - a + j3a) = (z - a)^2 - j^2 3^2 a^2 = z^2 - 2az + 10a^2$$

Satsen om faktorruppdelning ger att:

$$\begin{aligned} P(z) &= 2z^4 - 6z^3 - z^2 - 25 = 2(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4) = \\ &= 2(z^2 - 2az + 10a^2)(z^2 + cz + d) = \\ &= 2z^4 + (2c - 4a)z^3 + (2d - 4ac + 20a^2)z^2 + (-4ad + 20a^2c)z + 20a^2d \end{aligned}$$

Identifiering av koefficienterna ger:

$$\begin{array}{lll} z^4 : & 2 & = 2 \\ z^3 : & 2c - 4a & = -6 \Leftrightarrow 2c = 4a - 6 \Leftrightarrow c = 2a - 3 \\ z^2 : & 2d - 4ac + 20a^2 & = -1 \Leftrightarrow 2d = 4ac - 20a^2 - 1 = 4a(2a - 3) - 20a^2 - 1 \\ z^1 : & -4ad + 20a^2c & = 0 \Leftrightarrow 2a(10ac - 2d) = 0 \Leftrightarrow 2d = 10ac \\ z^0 : & 20a^2d & = -25 \Leftrightarrow 2a^2 2d = -5 \Leftrightarrow 2a^2(12a^2 + 12a + 1) = 5 \end{array}$$

$$2d = 10ac \Leftrightarrow 4ac - 20a^2 - 1 = 10ac \Leftrightarrow 6ac + 20a^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 6a(2a - 3) + 20a^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 32a^2 - 18a + 1 = 0 \Leftrightarrow a^2 - \frac{9}{16}a + \frac{1}{32} = 0 \Leftrightarrow a_{1,2} = \frac{9}{32} \pm \sqrt{\frac{81}{32^2} - \frac{32}{32^2}} = \frac{9}{32} \pm \frac{7}{32}$$

$$\text{I} \quad a_1 = \frac{9}{32} + \frac{7}{32} = \frac{1}{2}; 2a_1^2(12a_1^2 + 12a_1 + 1) = \frac{2}{2^2} \cdot \left(\frac{12}{2^2} + \frac{12}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} \cdot (3 + 6 + 1) = 5$$

$$\text{II} \quad a_2 = \frac{9}{32} - \frac{7}{32} = \frac{1}{16}; 2a_2^2(12a_2^2 + 12a_2 + 1) = \frac{2}{16^2} \cdot \left(\frac{12}{16^2} + \frac{12}{16} + 1\right) < \frac{2}{16^2} \cdot 3 < 5. \text{ Falsk rot!}$$

$$c = 2a - 3 = 2 \cdot \frac{1}{2} - 3 = -2, \quad d = 5ac = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-2) = -5$$

$$z^2 + cz + d = 0 \Leftrightarrow z^2 - 2z - 5 = 0 \Leftrightarrow z_{3,4} = 1 \pm \sqrt{6}$$

$$\text{SVAR: } z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm j\frac{3}{2}; z_{3,4} = 1 \pm \sqrt{6}$$

5. Lös, för alla värden på parametern p för vilka lösningar existerar, ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ (p+1)x_1 + (p+2)x_2 + (2p+3)x_3 = p+4 \\ (p^2-p+1)x_1 + (p^2-p+2)x_2 + (p^2-p+3)x_3 = 4 \end{cases}$$

Använd eliminationsmetoden på matrisform.

(5p)

Lösning:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{A}|\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ p+1 & p+2 & 2p+3 & p+4 \\ p^2-p+1 & p^2-p+2 & p^2-p+3 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 8 \\ p+1 & p+2 & 2p+3 & p+4 \\ p^2-p+1 & p^2-p+2 & p^2-p+3 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \boxed{-2} & \boxed{-p-1} & \boxed{-p^2+p-1} \\ \leftarrow & & \\ \leftarrow & & \\ \leftarrow & & \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -p & -p & -3p \\ 0 & -p^2+p & -2p^2+2p & -4p^2+4p \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \boxed{-\frac{1}{3}} \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -p & -p & -3p \\ 0 & -p^2+p & -2p^2+2p & -4p^2+4p \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \boxed{-2} & \boxed{p} & \boxed{p^2-p} \\ \leftarrow & & \\ \leftarrow & & \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & p & -3p \\ 0 & 0 & 0 & -4p(p-1) \end{bmatrix} \begin{matrix} (p \neq 0) \wedge (p \neq 1) \\ \boxed{\frac{1}{p}} \\ \boxed{-\frac{1}{4p(p-1)}} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fall 1: $(p \neq 0) \wedge (p \neq 1)$

(ES saknar lösning!)

Fall 2: $p = 0$

(z fri variabel. ES har oändligt många lösningar!)

ES saknar lösning!

Pivotelementet i rad 4

står sist i raden.

$$\mathbf{M} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 4 \\ y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$$

Fall 3: $p = 1$

(ES har entydig lösning!)

$$\mathbf{M} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\leftarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \\ \leftarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ varav } \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 6 \\ x_3 = -3 \end{cases}$$

6. I ett ONH-system är Π planet $2x + 2y - z + 18 = 0$ och

L är den rätta linje som går genom punkterna $Q = (0; 1; 2)$ och $R = (4; 5; 9)$.

a) Beräkna vinkeln mellan planet Π och den rätta linjen L.

(2p)

Lösning:

$$\text{L har riktningsvektorn } \mathbf{v} = \overrightarrow{QR} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ och } \Pi \text{ har normalvektorn } \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Om φ är vinkeln mellan L och Π och θ är vinkeln mellan L och $\mathbf{n}$ gäller att $\theta + \varphi = 90^\circ$.

Definitionen av skalärprodukt och formeln för komplementvinkeln ger

$$\frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{n}\| \|\mathbf{v}\|} = \cos \theta = \cos(90^\circ - \varphi) = \sin \varphi \Rightarrow \varphi = \arcsin \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{n}\| \|\mathbf{v}\|} \text{ varav}$$

$$\text{SVAR: } \varphi = \arcsin \frac{|2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 7|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} \sqrt{4^2 + 4^2 + 7^2}} = \arcsin \frac{|9|}{\sqrt{9} \sqrt{81}} = \arcsin \frac{1}{3} \approx 19,5^\circ$$

b) Beräkna avståndet från planet Π till punkten Q genom att använda avståndsformeln för planet.

(1p)

Lösning:

$$d = \frac{|Ax_Q + By_Q + Cz_Q + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2x_Q + 2y_Q - z_Q + 18|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{|2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 2 + 18|}{3} = 6le$$

- c) Beräkna avståndet från planet Π till punkten Q genom att först beräkna koordinaterna för projektionen Q_{proj} av punkten Q på planet Π och sedan beräkna längden av vektorn $\overrightarrow{QQ_{\text{proj}}}$. (3p)

Lösning:

En linje $L_{\perp}$ som är vinkelrät mot planet Π och går genom Q har ekvationen

$$L_{\perp} : \mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \overrightarrow{OQ} + t\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ 1+2t \\ 2-t \end{bmatrix}$$

Projektionspunkten Q_{proj} är skärningspunkten för $L_{\perp}$ och Π och erhålles genom att kombinera linjens och planets ekvationer. Insättning av $L_{\perp}$'s ekv. i Π 's ekvation ger:

$$2x + 2y - z + 18 = 2(2t) + 2(1+2t) - 1(2-t) + 18 = 9t + 18 = 0 \Rightarrow t = -2$$

$$Q_{\text{proj}} = (2t; 1+2t; 2-t) = (2(-2); 1+2 \cdot (-2); 2-(-2)) = (-4; -3; 4)$$

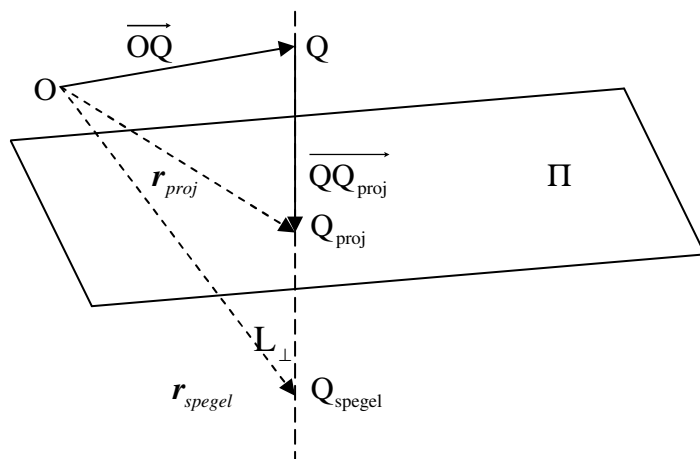
$$\overrightarrow{QQ_{\text{proj}}} = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow d = |\overrightarrow{QQ_{\text{proj}}}| = |-2| \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 6 \text{ le}$$

SVAR: 6 le

- d) Beräkna koordinaterna för spegelbilden Q_{spegel} av punkten Q i planet Π . (1p)

Lösning:

$$\overrightarrow{OQ_{\text{spegel}}} = \overrightarrow{OQ} + 2\overrightarrow{QQ_{\text{proj}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 \cdot 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \textbf{SVAR: } Q_{\text{spegel}} = (-8; -7; 6)$$

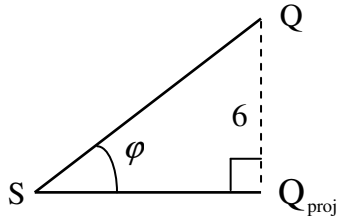


e) Låt S vara skärningspunkten för linjen L och planet Π .

Beräkna arean av triangeln QSQ_{spegel} .

(2p)

Lösning:



$$\frac{1}{3} = \sin \varphi = \frac{6}{SQ} \Rightarrow SQ = 18 \Rightarrow SQ_{\text{proj}} = \sqrt{18^2 - 6^2} = \sqrt{12 \cdot 24} = \sqrt{12 \cdot 12 \cdot 2} = 12\sqrt{2}$$

$$T_{QSQ_{\text{spegel}}} = 2T_{QSQ_{\text{proj}}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot SQ_{\text{proj}} \cdot QQ_{\text{proj}} = 12\sqrt{2} \cdot 6 = 72\sqrt{2} \text{ ae}$$

Alternativ lösning 6e:

Skärningspunkten S för L och Π och erhålles genom att kombinera linjens och planets ekvationer. Insättning av L:s ekvationer i Π :s ekvation ger:

$$2x + 2y - z + 18 = 2(4s) + 2(1 + 4s) - 1(2 + 7s) + 18 = 9s + 18 = 0 \Rightarrow s = -2$$

$$S = (4s; 1 + 4s; 2 + 7s) = (-8; -7; -12)$$

$$\overrightarrow{SQ} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -8 \\ -7 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 14 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}; \quad \overrightarrow{SQ_{\text{spegel}}} = \begin{bmatrix} -8 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -8 \\ -7 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 18 \end{bmatrix} = 18 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{SQ} \times \overrightarrow{SQ_{\text{spegel}}} = 2 \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \times 18 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 36 \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 36 \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 4 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 36 \left(\mathbf{e}_x \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{e}_y \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{e}_z \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right) = 36 \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} = 144 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{SVAR:} \quad T_{QSQ_{\text{spegel}}} = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{SQ} \times \overrightarrow{SQ_{\text{spegel}}} \right| = \frac{1}{2} |144| \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = 72\sqrt{2} \text{ ae}$$