

**Lösningar till problemtentamen i Algebra för DAI1, DEI1, EI1, EPI1, MEI1 och MI1
2010-10-22.**

1.a) Skriv det komplexa talet $-2 + j2\sqrt{3}$ på polär form. (1p)

Lösning:

$$\mathbf{a)} \begin{cases} |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4 \\ \arg z = (x < 0) = \pi + \arctan \frac{y}{x} = \pi + \arctan \frac{2\sqrt{3}}{-2} = \pi - \arctan \sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\mathbf{SVAR:} -2 + j2\sqrt{3} = 4e^{j\frac{2\pi}{3}}$$

b) Lös ekvationen $z^2 = -2 + j2\sqrt{3}$. (3p)

Lösning:

$$z^2 = (re^{jv})^2 = r^2 e^{j2v} = -2 + j2\sqrt{3} = 4e^{j\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = 4 \Rightarrow r = 2 \\ 2v = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow v = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

$$z_k = 2e^{j\left(\frac{\pi}{3} + k\pi\right)} \text{ för } k = 0, 1 \text{ varav}$$

$$\mathbf{SVAR:} \begin{cases} z_0 = 2e^{j\left(\frac{\pi}{3} + 0\cdot\pi\right)} = 2e^{j\frac{\pi}{3}} = 2(\cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 + j\sqrt{3} \\ z_1 = 2e^{j\left(\frac{\pi}{3} + 1\cdot\pi\right)} = 2e^{j\frac{\pi}{3}} e^{j\pi} = (1 + j\sqrt{3})(\cos \pi + j \sin \pi) = -1 - j\sqrt{3} \end{cases}$$

c) Ekvationen $z^4 - 4z^3 + 18z^2 + 8z + q = 0$ har en icke-reell rot med realdelen 2.

Lös ekvationen och bestäm det reella talet q .

(4p)

Lösning:

Sätt $P(z) = z^4 - 4z^3 + 18z^2 + 8z + q$. Satsen om komplexkonjugerade rötter ger att

$$\left. \begin{array}{l} P(z) \text{ har reella koefficienter} \\ z_1 = 2 + jb \text{ är rot till } P(z) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow z_2 = \bar{z}_1 = 2 - jb \text{ är rot till } P(z) = 0.$$

$P(z)$ har alltså faktorn

$$(z - z_1)(z - z_2) = (z - 2 - jb)(z - 2 + jb) = (z - 2)^2 - j^2 b^2 = z^2 - 4z + 4 + b^2 = z^2 - 4z + k$$

Satsen om faktorruppdelning ger att:

$$\begin{aligned} P(z) &= z^4 - 4z^3 + 18z^2 + 8z + q = 1(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4) = \\ &= (z^2 - 4z + k)(z^2 + cz + d) = \\ &= z^4 + (c - 4)z^3 + (d - 4c + k)z^2 + (-4d + kc)z + kd \end{aligned}$$

Identifiering av koefficienterna ger:

$$\begin{array}{lll} z^4 : & 1 & = 1 \\ z^3 : & c - 4 & = -4 \Leftrightarrow c = 0 \\ z^2 : & d - 4c + k & = 18 \Leftrightarrow k = 18 - d \\ z^1 : & -4d + kc & = 8 \Leftrightarrow -4d = 8 \Leftrightarrow d = -2 \Rightarrow k = 20 \\ z^0 : & kd & = q \Leftrightarrow q = kd = 20 \cdot (-2) = -40 \end{array}$$

$$k = 20 \Leftrightarrow b^2 + 4 = 20 \Leftrightarrow b^2 = 16 \Leftrightarrow b = \pm 2$$

$$z^2 + cz + d = 0 \Leftrightarrow z^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow z^2 = 2 \Leftrightarrow z_{3,4} = \pm\sqrt{2}$$

SVAR: $z_{1,2} = 2 \pm j4$; $z_{3,4} = \pm\sqrt{2}$; $q = -40$

2. Låt ES vara följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} px + 2y = 4 \\ x + y = 2 \\ x + py = 1 \end{cases}$$

a) Lös ekvationssystemet ES för de värden på parametern p för vilka ES har lösningar.

(3,5p)

Lösning:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = [\mathbf{A}|\mathbf{b}] &= \begin{bmatrix} p & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & p & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ p & 2 & 4 \\ 1 & p & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2-p & 4-2p \\ 0 & p-1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} p \neq 2 \\ \frac{1}{2-p} \end{matrix} \sim \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & p-1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1-2p \end{bmatrix} \begin{matrix} p \neq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{1-2p} \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Fall 1: $p \neq \frac{1}{2}, p \neq 2$ ES saknar lösning!

$$\mathbf{M} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Pivotelementet i rad 3 står **sist** i raden.} \quad \left(\text{varav} \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ 0 = 1 \end{cases} \right)$$

Fall 2: $p = \frac{1}{2}$ ES har entydig lösning!

$$\mathbf{M} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{varav} \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} n &= \text{antalet obekanta} = 2 \\ b &= \text{antalet bundna variabler} = \text{rang } \mathbf{M} = 2 \\ f &= \text{antalet fria variabler} = n - b = 2 - 2 = 0 \\ f &= 0 \Rightarrow \text{ES har entydig lösning} \end{aligned}$$

Fall 3: $p = 2$ ES har entydig lösning!

$$\mathbf{M} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2-p & 4-2p \\ 0 & p-1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{varav} \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} n &= \text{antalet obekanta} = 2 \\ b &= \text{antalet bundna variabler} = \text{rang } \mathbf{M} = 2 \\ f &= \text{antalet fria variabler} = n - b = 2 - 2 = 0 \\ f &= 0 \Rightarrow \text{ES har entydig lösning} \end{aligned}$$

- b)** Lös för $p = 1$ ekvationssystemet ES approximativt i minsta kvadratmetodens mening och beräkna medelfelet. (3,5p)

Lösning:

$$(ES) \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases} \text{ eller på matrisform } \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Bästa lösningen i minsta kvadratmetodens mening erhålles ur

$$(ESU) \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix} \text{ varav}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{b}) = \frac{1}{3 \cdot 6 - 4 \cdot 4} \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} \text{ och}$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} x + 2y - 4 \\ x + y - 2 \\ x + y - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 5 - 4 \\ -1 + \frac{5}{2} - 2 \\ -1 + \frac{5}{2} - 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ varför medelfelet}$$

$$\eta = \frac{|\mathbf{f}|}{\sqrt{m}} = \frac{\sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0,41$$

3. Låt $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & p \end{bmatrix}$ och $\mathbf{B} = [p \quad 3p]$.

- a)** Lös matrisekvationen $\mathbf{X}\mathbf{A} = \mathbf{B}$ för $p \neq 6$ genom att först lösa ut $\mathbf{X}$ med hjälp av lämplig invers matris. (2p)

Lösning:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & p \end{vmatrix} = 1 \cdot p - 2 \cdot 3 = p - 6 \neq 0 \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} \text{ existerar!}$$

$$\mathbf{X}\mathbf{A} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{X}\mathbf{E} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}$$

$$\mathbf{SVAR: X} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{p-6} [p \quad 3p] \cdot \begin{bmatrix} p & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{p-6} [p^2 - 6p \quad -3p + 3p] = [p \quad 0]$$

b) Lös matrisekvationen $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$ för $p = 6$.

(2p)

Lösning:

$\det \mathbf{A} = p - 6 = 6 - 6 = 0 \Rightarrow \mathbf{A}^{-1}$ existerar ej! Gör en typinspektion.

Antag att $\text{typ} \mathbf{X} = m \times n$.

$$\text{typ} \mathbf{XA} = (m \times n)(2 \times 2) = m \times 2 = \text{typ} \mathbf{B} = 1 \times 2 \Rightarrow \begin{cases} n = 2 \\ m = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{typ} \mathbf{X} = 1 \times 2$$

Ansätt $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$. Vi får att

$$\mathbf{XA} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y & 3x+6y \end{bmatrix} = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} p & 3p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 18 \end{bmatrix} \text{ varav följer att}$$

$$\begin{cases} x+2y=6 \\ 3x+6y=18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=6 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6-2t \\ y=t \end{cases}$$

SVAR: $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-2t & t \end{bmatrix}$

4. I ett ONH-system är punkterna $A = (1; 0; 1)$, $B = (3; 1; 1)$, $C = (3; 2; 2)$,

$D = (a+1; a; 5)$ och $E = (1; 6; 1)$ givna.

Π är det plan som går genom punkterna A, B och C. L är den linje som går genom punkterna D och E.

a) Beräkna $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \bullet \overrightarrow{AD}$.

(1,5p)

Lösning:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \left(\mathbf{e}_x \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{e}_y \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{e}_z \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \right) = \\ &= \mathbf{e}_x (1-0) - \mathbf{e}_y (2-0) + \mathbf{e}_z (4-2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

SVAR: $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \bullet \overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} a \\ a \\ 4 \end{bmatrix} = 1 \cdot a + (-2) \cdot a + 2 \cdot 4 = 8 - a$

b) Bestäm konstanten a så att volymen för tetraedern ABCD blir $\frac{1}{3}$ ve. (1p)

Lösning:

$$V_{ABCD} = \pm \frac{1}{6} (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \bullet \overrightarrow{AD} = \pm \frac{1}{6} (8 - a) = \frac{1}{3} \Rightarrow 8 - a = \pm 2 \Rightarrow a = 8 \mp 2$$

SVAR: $(a = 6) \vee (a = 10)$

c) Avgör för vilka värden på a som $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ bildar ett högersystem. (0,5p)

SVAR: $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \bullet \overrightarrow{AD} = 8 - a > 0 \Leftrightarrow a < 8$

d) Finns något värde på konstanten a för vilket linjen L inte skär planet Π ? (2p)
Bestäm i så fall detta värde på a .

Lösning:

En linje L som går genom D och E har ekvationen

$$L: \mathbf{r} = \overrightarrow{OE} + t\overrightarrow{ED} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} a \\ a-6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

L skär ej planet $\Pi \Rightarrow$ L är parallell med $\Pi \Leftrightarrow \mathbf{n} \bullet \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \bullet \overrightarrow{ED} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} a \\ a-6 \\ 4 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot a + (-2) \cdot (a-6) + 2 \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow 20 - a = 0 \Leftrightarrow a = 20$$

Återstår att kontrollera att linjen L ej ligger i planet.

D ligger i $\Pi \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \bullet \overrightarrow{AD} = 0 \Leftrightarrow a = 8 \neq 20$

SVAR: $a = 20$

e) Finns det något värde på talet a sådant att linjen L är vinkelrät mot planet Π ?

Bestäm i så fall detta värde på a .

(3p)

Lösning:

L är vinkelrät mot planet $\Pi \Leftrightarrow L$'s riktningsvektor är parallell med Π 's normalvektor $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{ED} = t \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \\ a-6 \\ 4 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a=t & \Rightarrow & a=2 \\ a-6=-2t & \Rightarrow & -4=-4 \\ 4=2t & \Rightarrow & t=2 \end{cases}$$

SVAR: $a = 2$

Alt.1. Definitionen av skalärprodukt ger att $\pm (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \bullet \overrightarrow{ED} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{ED}| \cos \theta$

dvs att

$$\pm (20-a) = |(1, -2, 2)| |(a, a-6, 4)| \cos 0^\circ \Leftrightarrow \pm (20-a) = 3\sqrt{2a^2 - 12a + 52}$$

Kvadrering ger att

$$400 - 40a + a^2 = 9(2a^2 - 12a + 52) \Rightarrow 17a^2 - 78a + 68 = 0 \Rightarrow a^2 - 4a + 4 = 0 \Rightarrow a_{1,2} = 2$$

Alt.2. $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \times \overrightarrow{ED} = \mathbf{0}$ osv.

Alt.3. $\overrightarrow{AB}$ är vinkelrät mot $L \Rightarrow \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{ED} = 0 \Rightarrow 3a - 6 = 0 \Rightarrow a = 2$