



Dugga/Baskunskapstentamen vid Chalmers tekniska högskola i matematik, kurskod LMA 212, för DAI och EI, onsdag f.m. 20120111

Lösningarna skall vara utförligt gjorda. Svaren skall vara exakta och vara förenklade så långt som möjligt!

1. Givet vektorerna $\mathbf{a} = (1, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (2, -1, 1)$.

- (a) Bestäm $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$, (b) Bestäm exakt vinkeln mellan $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$.
(c) Bestäm $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. (d) Bestäm samtliga vektorer $\mathbf{c}$, som är vinkelräta mot $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ och har längd 1.

4p

2. (a) Definiera skalär produkt mellan två vektorer $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$.
(b) Beräkna den skalära produkten av två vektorer på komponentform (i ett ONH-system), $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$ och $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$.

- (c) Beräkna determinanten av $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

- (d) Skriv upp $\mathbf{A}^T$ för matrisen $\mathbf{A}$ ovan.

4p

3. Givet två olika punkter P och Q i $\mathbb{R}^3$, skriv upp en ekvation för linjen genom punkterna, på vektorform.

2p

4. Givet matrisekvationen

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{X}.$$

- (a) Lös ut matrisen $\mathbf{X}$ uttryckt i de två andra matriserna. Förutsett att $\mathbf{A}$ är kvadratisk och att lämpliga matriser har invers.
(b) Med förutsättningar som ovan, och att $\mathbf{B}$ är av typ 2×3 , ange typen för $\mathbf{A}$ och $\mathbf{X}$.

4p

5. $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är vektorer i $\mathbb{R}^3$. Förenkla

(a)

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) + \mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} + 2\mathbf{a}).$$

(b)

$$\mathbf{a} \times (2\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{b} + 2\mathbf{a}).$$

4p

6. Givet ES

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= a \\ 2x + z &= b \\ x - y + z &= c \end{aligned}.$$

- (a) Visa att detta ES har exakt en lösning $(x; y; z)$.

- (b) Finns det reella tal p och q så att $\mathbf{B} = p \begin{bmatrix} q & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -5 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ är inversmatris till koefficientmatrisen $\mathbf{A}$ i (a)? Bestäm i så fall dessa p och q .

3p

7. Givet tre punkter P , Q och R i $\mathbb{R}^3$, som inte ligger på en linje.

- (a) Förklara hur arean av triangeln med hörn i dessa punkter, kan beräknas med vektorprodukt. Ge ett uttryck för arean uttryckt med dessa tre punkter.
(b) Förklara hur planets ekvation kan härledas med dessa punkter för planet som innehåller de tre punkterna. Ge också ett en ekvation för planet uttryckt m.h.a. P , Q och R .

4p

Lycka till!