



Dugga/Baskunskapstentamen vid Chalmers tekniska högskola i matematik, kurskod LMA 212, för DAI och EI, onsdag f.m. 20130116

Ansvarig lärare Reimond Emanuelsson, tel 031 772 5888/031 772 3552

Lösningarna skall vara utförligt gjorda. Svaren skall vara exakta och vara förenklade så långt som möjligt!

1. Givet vektorerna $\mathbf{a} = (3, -8, 5)$, $\mathbf{b} = (-1, 1, -2)$.
 - (a) Förenkla så långt som möjligt $|\mathbf{a} + 7\mathbf{b}|$, (b) Bestäm exakt vinkeln mellan $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$.
 - (c) Bestäm $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. (d) Bestäm samtliga vektorer $\mathbf{c}$, som är vinkelräta mot $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ och har längd 1.4p
2. Givet matriserna $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$ och $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \end{bmatrix}$ med reella element.
 - (a) Beräkna den matrisprodukt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ eller $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ som är möjlig.
 - (b) Beräkna $\det \mathbf{A}$.
 - (c) Antag att $\det \mathbf{A} \neq 0$. Skriv upp inversmatrisen till $\mathbf{A}$ uttryckt med elementen i $\mathbf{A}$.5p
3. Givet två olika punkter P och Q i $\mathbb{R}^3$, skriv upp en ekvation för linjen genom punkterna, på valfri form. 2p
4. Antag att $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är två vektorer i $\mathbb{R}^3$ med samma längd 4.
 - (a) Förenkla
$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} - 2\mathbf{a}).$$
 - (b) Förenkla
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{b} - 2\mathbf{a}).$$
 - (c) Antag dessutom att mellanliggande vinkel mellan $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är 60° . Förenkla $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.
 - (d) Antag dessutom att mellanliggande vinkel mellan $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är 30° . Förenkla $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.4p
5. Antag att matrisen $\mathbf{A}$ är kvadratisk och förutsätt att lämpliga matriser i (a) och (b) nedan är inverterbara.
 - (a) Lös ut $\mathbf{X}$ i matrisekvationen $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X} + \mathbf{B}$.
 - (b) Visa att det $\mathbf{X}$ som är lösning i (a) också är en lösning till matrisekvationen
$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X} + (\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1} \mathbf{B}.$$3p
6. Givet tre punkter P, Q och R i $\mathbb{R}^3$, som inte ligger på en linje.
 - (a) Förklara hur arean av triangeln med hörn i dessa punkter, kan beräknas med vektorprodukt. Ge ett uttryck för arean uttryckt med dessa tre punkter.
 - (b) Förklara hur planets ekvation kan härledas med dessa punkter för planet som innehåller de tre punkterna. Ge också ett en ekvation för planet uttryckt m.h.a. P, Q och R .4p
7. Antag att $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ är två matriser och m, n och p är tre olika positiva heltal, samt att typ $\mathbf{A} = m \times n$ och att typ $\mathbf{B} = m \times p$. Vilka av följande matrismultiplikationer är möjliga? 3 p om alla svar är riktiga, 1.5 p om precis tre svar är riktiga.
 - (a) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ (b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T$ (c) $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}$ (d) $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$3p

Lycka till!