



Chalmers Tekniska Högskola Campus Lindholmen

Dugga för DAI1 och EI1, LMA 212, 20120917, 8.00-10.00

Fullständig lösning krävs på uppgift 2, 3 och 4.

1. Givet följande totalmatriser för ES (linjära ekvationssystem), på trappstegsform. I A), B) och C) har man totalmatriser för två variabler x och y . I D), E) och F) har man totalmatriser för tre variabler x , y och z .

A)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 12 \\ 0 & 1 & 54 \end{array} \right]$$

B)

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{array} \right]$$

C)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

D)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

E)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

F)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

För respektive ES

- (a) ange rangen på koefficientmatriserna, 0.5p
- (b) ange rangen på totalmatriserna, 0.5p
- (c) ange antalet lösningar till motsvarande ES. 1p

Motsvarande ES behöver inte lösas.

2. (a) Överför följande ekvationssystem på matrisform och lös sedan systemet, via (rad-)reducerad matris.

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= -2 \\ x + 2y - z &= 1 \\ x + 3y &= 4 \end{aligned}$$

1.5p

- (b) Bestäm rangen av följande matris $\mathbf{A}$ för olika värden på parametern p .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & p & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

1p

3. Två matriser $\mathbf{A}$ är av typ $m \times p$ respektive $\mathbf{B}$ av typ $q \times n$.

- (a) Ge ett ekvivalent villkor på m , p , q , och n för att matrisen $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ skall existera. Vad är typ $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ under detta villkor? 1p
- (b) Ge ett *nödvändigt* villkor på m , p , q , och n för att likheten $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ skall vara sann. 1.5p

4. Givet matrisekvationen $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} - \mathbf{X}$. Utgå från att matrisekvationen är korrekt.

- (a) Antag att typ $\mathbf{A} = 3 \times n$ och typ $\mathbf{B} = 3 \times 2$. Bestäm typen för $\mathbf{X}$ och typen för $\mathbf{A}$. 0.5p
- (b) Vad är matrisen $\mathbf{X}$ uttryckt i matriserna $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$? (Du får antaga att de inverser som behövs, existerar.) 1.5p

Lösningsförslag till dugga för DAI1 och EI1, LMA 212, 20120917, 8.00-10.00

1.

Övning	rang koeff. matris	rang totalmatris	antal lösningar
A)	2	2	1
B)	1	2	0
C)	1	1	∞
D)	2	3	0
E)	2	2	∞
F)	2	3	0

2. (a) Överför följande ekvationssystem på matrisform och lös sedan systemet, via reducerad matris.

$$\begin{array}{rcl} x + y - 2z & = & -2 \\ x + 2y - z & = & 1 \\ x + 3y & = & 4 \end{array} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

så att $x = 3z - 5$ och $y = 3 - z$. Med $z = t$ blir lösningen

$$\begin{cases} x = 3t - 5 \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

- (b) (Bestäm rangen av följande matris $\mathbf{A}$ för olika värden på parametern p .)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & p & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & p & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Om $p = 0$ är rangen 2 och om $p \neq 0$ är rangen 3.

3. (Två matriser $\mathbf{A}$ är av typ $m \times p$ respektive $\mathbf{B}$ av typ $q \times n$.)

- (a) Ekvivalent villkor för att matrisen $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ skall existera är att $p = q$.
 $\text{typ}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = m \times p \cdot p \times n = m \times n$ under detta villkor.
- (b) Ett *nödvändigt* villkor på m, p, q , och n : För att $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ skall existera är $p = q$.
 För att $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ skall existera måste $n = m$.
 Alltså är $\text{typ}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = m \times m$ och $\text{typ}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = n \times n$, så att $m = n$.
 Villkoret är att $m = n = p = q$ för att likheten $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ skall vara sann.

4. (Givet matrisekvationen $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} - \mathbf{X}$. Utgå från att matrisekvationen är korrekt.)

- (a) $\mathbf{B}$ och $\mathbf{X}$ är av samma typ p.g.a. HL, alltså 3×2 . Produkten $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$ har samma typ 3×2 . $\text{typ} \mathbf{A} = 3 \times n$ och $\text{typ} \mathbf{X} = 3 \times 2$, så att $n = 3$.
- (b)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} - \mathbf{X} \iff (\mathbf{A} + \mathbf{E}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \iff \mathbf{X} = (\mathbf{A} + \mathbf{E})^{-1} \cdot \mathbf{B}$$