



Chalmers Tekniska Högskola

Dugga 2 för DAI1 och EI1, LMA 212, 20121008, 8.00-10.00

Lärare Reimond Emanuelsson, tel 772 5888

Ge fullständig lösning på uppgift 4 och 5!

1. Beräkna determinanten av matriserna

$$(a) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad (b) \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2012 & 2012 & 2012 \\ 0 & 2 & 2012 & 2012 \\ 0 & 0 & 1 & 2012 \\ 0 & 0 & 0 & 503 \end{bmatrix}$$

1.5 p
1.5 p

2. Vilka samband gäller (är sanna) respektive gäller inte, för alla vektorer $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$ i $\mathbb{R}^3$? För poäng skall alla svar vara riktiga.

(a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$	(b) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$	(c) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
(d) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$	(e) $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$	(f) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$

2.0 p

3. Definiera begreppet vektorprodukt (vektoriell produkt) mellan två vektorer $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$.

3.0 p

4. Punkterna $P = (1; 2; 3)$, $Q = (1; 1; 2)$, $R = (-3; 2; 1)$ och $S = (3; 1; 1)$ är givna.

(a) Bestäm arean av triangeln med hörn i P , Q och R . 1.5 p

(b) Bestäm en ekvation för planet som innehåller punkterna P , Q och R . 1.5 p

(c) Bestäm volymen av tetraedern som har hörn i P , Q , R och S . 2.0 p

5. Givet två linjer på parameterform

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t + 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{och} \quad \begin{cases} x = -2t \\ y = t + 3 \\ z = 4 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dessa linjer skär varandra i en punkt.

(a) Bestäm koordinaterna för skärningspunkten mellan linjerna. 1.5 p

(b) Bestäm vinkeln mellan linjerna. 1.5 p

Lösningsförslag till Dugga 2 för DAI1 och EI1, LMA 212, 20121008, 8.00-10.00

1. Beräkna determinanten av matriserna..

(a)

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} -4 & -7 \\ \leftarrow & \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} = \dots = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(b)

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 2 & 2012 & 2012 & 2012 \\ 0 & 2 & 2012 & 2012 \\ 0 & 0 & 1 & 2012 \\ 0 & 0 & 0 & 503 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 12 \cdot 503 = 2012$$

2. Samband gäller (är sanna) respektive gäller inte, för alla vektorer $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$ i $\mathbb{R}^3$?
För poäng skall alla svar vara riktiga.

(a) gäller ej $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$	(b) gäller ej $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$	(c) gäller ej $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
(d) gäller $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$	(e) gäller $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$	(f) gäller $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$

2.0 p

3. (Definiera begreppet vektorprodukt (vektoriell produkt) mellan två vektorer $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$.)

- $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ bildar ett högerssystem (i den ordningen),
- $\mathbf{a} \perp \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ och $\mathbf{b} \perp \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ samt
- $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin \theta$, där θ är mellanliggande vinkel.

3.0 p

4. Punkterna $P = (1; 2; 3)$, $Q = (1; 1; 2)$, $R = (-3; 2; 1)$ och $S = (3; 1; 1)$ är givna.

(a)

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (2, 4, -4)$$

och arean av triangeln med hörn i P , Q och R är då

$$T = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|}{2} = \frac{|(2, 4, -4)|}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}}{2} = 3 \text{ a.e.}$$

- (b) En ekvation för planet som innehåller punkterna P , Q och R : Normalvektor är $(1, 2, -2)$, så att ekvationen är

$$(1, 2, -2) \cdot ((x, y, z) - (1, 2, 3)) = x + 2y - 2z + 1 = 0$$

- (c) Volymen av tetraedern som har hörn i P , Q , R och S är

$$V = \frac{|(2, 4, -4) \cdot \overrightarrow{PS}|}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

5. (a) (Bestäm koordinaterna för skärningspunkten mellan linjerna.) Sätt den ena parametern till s : Likhete mellan koordinaterna för de två linjerna ger

$$\begin{cases} x = s = -2t \\ y = s = t + 3 \\ z = 2s + 1 = 4 - t \end{cases} \iff \begin{cases} s = 2 \\ t = -1 \end{cases}.$$

Insättning i respektive linjes ekvation ger $(x; y; z) = (2; 2; 5)$

- (b) Vinkeln mellan linjerna: Riktningsvektorer är $\mathbf{u} = (1, 1, 2)$ och $\mathbf{v} = (-2, 1, -1)$.
Vi får att

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|} = -\frac{1}{2} \iff \theta = 120^\circ$$

Svar vinkeln mellan linjerna är $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.