

1

Linjärt ekvationssystem (ES)

Exempel 1.1 Betrakta det ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}.$$

Det har två ekvationer och två obekanta x och y . Det innehåller termer med variabler av typ ax och by och inga andra. Det kallas då linjärt. Vi skall bara behandla denna typ här. Dessutom skall vi lösa detta linjära ekvationssystem, förkortat ES. Det betyder att vi skall bestämma de par (x, y) som uppfyller ekvationen. Vi lösa ett ES genom att eliminera variablerna, *eliminationsmetoden*.

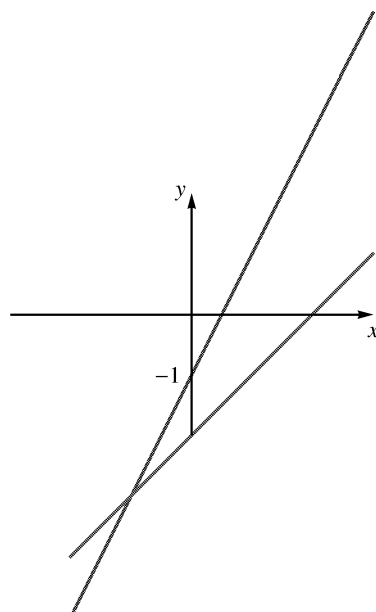
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad \curvearrowright \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y = 2) \cdot (-2) \\ 2x - y = 1 \end{cases} \quad \searrow$$

Bågen $\curvearrowright$ betyder radbyte och pilen $\searrow$ betyder här att första ekvation multipliceras med -2 och läggs sedan till andra ekvation. Med fortsatt ekvivalens få vi

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 0 \cdot x + y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ (y = -3) \cdot 1 \end{cases} \quad \swarrow \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}.$$

Alltså är $(x, y) = (-1, -3)$.

GRAFISK LÖSNING



■

Vi använde några *radoperationer* och dessa är

1. Byte av ordning av ekvationer $\curvearrowright$.
2. Multiplikation av en ekvation med en konstant, som sedan adderas till en annan ekvation.
3. Ytterligare en radoperation är att multiplicera en ekvation (rad) med en konstant $\neq 0$.

Exempel 1.2 Vi skall skriva upp detta ES i exempel 1.1 utan att skriva upp variabler, plustecken och likhetstecken. Vi skriver bara upp koefficienterna och högerledet (HL), avskilt med ett lodrätt streck.

$$\text{ES } \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad \text{skrivs} \quad \underbrace{\begin{array}{c} \text{Koeff. matris} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right] \\ \text{totalmatris} \end{array}}.$$

- Totalmatrisen har 2 rader och 3 kolonner och sägs då vara av typ 2×3 emedan koefficientmatrisen är av typ 2×2 .
- Det inrutade elementet $\boxed{2}$ i totalmatrisen är i rad 2 och kolonn 3 och därmed på *plats* $(2,3)$.
- Ett ES skrivet på detta sätt kallas *matrisform*.

Dessutom utför vi samma radoperationer, som ovan.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{array} \right] \curvearrowright \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{array} \right] \cdot (-2) \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{array} \right] \cdot (1) \sim$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{array} \right]$$

$$\text{som betyder } \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}.$$

■

Exempel 1.3 Vi skriver om följande ES på matrisform..

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2y - 4x = 1 \end{cases} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{array} \right].$$

Andra raden i den sista totalmatrisen betyder $0 \cdot x + 0 \cdot y = 7$, alltså att $0 = 7$, en omöjlighet/motsägelse. Detta betyder att detta ES saknar lösning (har 0 lösningar).

■

Vi ger ett exempel till innan vi inför nya begrepp och slutsatser.

Exempel 1.4 Vi skriver om följande ES på matrisform..

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -4x + 2y = -2 \end{cases} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

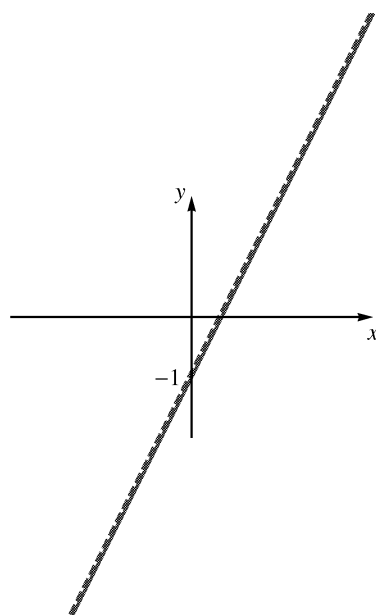
Sista raden betyder $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$, en självklarhet. Denna rad kan man alltså stryka utan att information om ES försvinner. Återstår alltså $2x - y = 1$. Alla punkter (x, y) , som uppfyller denna ekvation utför lösningarna på detta ES. Vi kan skriva detta

$$(x, y) = (x, 2x - 1) = x(1, 2) + (0, -1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Man kan också införa en *parameter*, i detta fall $x = t$, så att lösningarna kan skrivas

$$(x, y) = (t, 2t - 1) = t(1, 2) + (0, -1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

GRAFISK LÖSNING



■

- ES i exempel 1.2 har en (1) lösning, ES i exempel 1.3 har ingen (0) lösningar och ES i exempel 1.4 har oändligt med (∞) lösningar. Dett är typsiskt för ES.
- Vi inför begreppet pivotelement. Det första element i en given rad, räknat från vänster, som är skilt från noll kallas *pivotelement*.
- När varje pivotelement i en rad står till höger om pivotelementet i raden ovan är matrisen på trappstegsform eller alternativt, matrisen är en trappstegsmatris.
- När alla pivotelement $= 1$ och övriga element i *samma kolonn* är $= 0$, är matrisen (*rad-*)*reducerad*.
- I en trappstegsmatris eller radreducerad matris kan koefficientmatrisen liksom totalmatrisen ha en *nollrad*, en rad med bara nollor. Antal rader som *inte* är noll kallas matrisens *rang*.

M.h.a. ovanstående definitioner drar vi följande slutsatser m.h.a. exempel 1.2-1.4

1. Vi ser att i exempel 1.2 är rangen för koefficientmatris=rangen för totalmatrisen=
2. Likaså är antal variabler = 2 (x och y). Vi får alltså

$$\text{rang koeff. matris} = \text{rang totalmatris} = \text{antal variabler}.$$

Detta är ekvivalent med att ES har 1 lösning.

2. Vi ser att i exempel 1.3 är rangen för koefficientmatris= 1 < rangen för totalmatrisen= 2. D.v.s.

Vi får alltså

$$\text{rang koeff. matris} < \text{rang totalmatris}.$$

Detta är ekvivalent med att ES har 0 lösningar.

3. I exempel 1.4 är rangen för koefficientmatris=rangen för totalmatrisen= 1. Antal variabler = 2 Vi får alltså

$$\text{rang koeff. matris} = \text{rang totalmatris} < \text{antal variabler}.$$

Detta är ekvivalent med att ES har ∞ med lösningar.

Kommentarer

- När man har oändligt (∞) med lösningar, brukar man införa en eller flera parametrar.

Exempel 1.5 (3 ekvationer och två obekanta) Betrakta ES

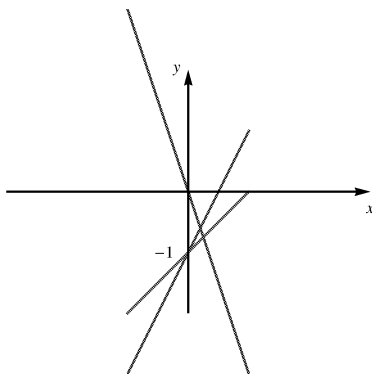
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = 2 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$$

Det har fler ekvationer (3) än obekanta (2). Ett sådant ES kallas överbestämt och brukar sakna lösning. På matrisform blir motsvarande radreducerade matris

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Vi ser att rangen för koefficientmatrisen är 2 och rangen för totalmatrisen är 3. Alltså saknar ES lösning (noll lösningar).

GRAFISK LÖSNING



Exempel 1.6 För ES

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + z = -2 \end{cases}$$

har vi fler variabler än ekvationer. Vi förväntar oss att få oändligt med lösningar. Motsvarande radreducerade matris är

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -4 \end{array} \right]$$

Dessa ekvationer betyder att $x = -\frac{1}{2} \cdot z + 1$ och $y = \frac{1}{2} \cdot z - 4$. Vi ser att vi kan uttrycka x och y i variabeln z . Dessutom är det x och y som har pivotelement (§ och 1). z kan väljas till vilket tal som helst varvid x och y blir entydigt bestämda. z kallas fri variabel och x och y bundna. Lösningarna kan skrivas på lite olika sätt. Med den fria variabeln utbytt mot en parameter $z/2 = t$ blir svaret

$$\begin{cases} x = -t - 1 \\ y = t - 4 \\ z = 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

eller $(x, y, z) = t(-1, 1, 2) + (-1, -4, 0), t \in \mathbb{R}$.

■

Exempel 1.7 Lös ES

$$\begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ x - y - z = 2 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \end{array} \right].$$

Vi ser att rangen för koefficientmatrisen=rangen för totalmatrisen=antal variabler=3. Alltså entydig (en) lösning. Lösningen är $(x, y, z) = (1, 1, -2)$.

■

- Exempel 1.6: De variabler som motsvarar pivotelementen är x och y kallas bundna och z kallas fri. Det är den fria variabeln som tilldelas en parameter. Vi sätter $z/2 = t$, så att $z = 2t$. Därmed ger andra raden att $y = t - 4$ och första raden att $x = -t - 1$. Alltså

$$\begin{cases} x = -t - 1 \\ y = t - 4 \\ z = 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Alternativt skriver vi lösningen som

$$(x, y, z) = t(-1, 1, 2) + (-1, -4, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vi sammanfattar rang och antal lösningar till ett ES.

Exempel	rang	koeff. matris		rang totalmatris		antal variabler	antal lösningar
1.2	2	=		2	=	2	1
1.3	1	<		2	=	2	0
1.4	1	=		1	<	2	∞
1.5	2	<		3		2	0
1.6	2	=		2	<	3	∞
1.7	3	=		3	=	3	1

Sammanfattning

1. Ett ES på matrisform kan skrivas, som en totalmatris.
2. Med antal rader = m och antal kolonner = n , blir dess typ $m \times n$.
3. Första elementet $\neq 0$ i en rad (räknat från vänster) kallas pivotelement¹.
4. Om pivotelement i raden under står till höger om pivotelementet i raden ovan, sägs matrisen vara en trappstegsmatris (Alt. vara på trappstegsform).
5. Antal rader i en trappstegsmatris som inte enbart innehåller nollor, kallas matrisens rang.
6.

rang koefficientmatris = rang totalmatris = antal variabler,	1 lösning
rang koefficientmatris < rang totalmatris,	0 lösningar
rang koefficientmatris = rang totalmatris < antal variabler,	∞ med lösningar

Exempel 1.8 Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - 2z + 3u &= 0 \\ 2x - y + z + u &= 3 \\ 3x + y - 5z + 2u &= 3 \end{cases},$$

bestäm rangen av koefficient- och totalmatris, antal bundna och fria variabler samt antal lösningar.

Lösning: Vi har tre ekvationer och fyra obekanta/variabler. På matrisform får vi

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 & 2 & 3 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

Svar:

- Rang för koefficientmatrisen = rang för totalmatrisen = 3.
- Tre bundna variabler (x, y, z) och en fri variabel (u).
- Antal lösningar är ∞ p.g.a. existensen av fri(-a) variabler.
- Lösningen kan skrivas

$$\begin{cases} x &= u + 2 \\ y &= 5u + 2 \\ z &= 2u + 1 \\ u &= u \end{cases}$$

■

Exempel 1.9 Matrisformen

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

motsvarar ett ES i variablerna (x, y, z, u). Svara på samma frågor som i föregående exempel!

¹Pivot uttalas piv'å.

Lösning:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 0 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 12 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -8 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Svar:

- Rang för koefficientmatrisen=rang för totalmatrisen=2.
- Två bundna variabler (x, y) och två fria variabler (z, u) .
- Antal lösningar är ∞ p.g.a. existensen av fri(-a) variabler.
- Lösningen kan skrivas, med införande av parametrar s och t .

$$\begin{cases} x = -12s + 4t + 2 \\ y = 8s - 3t - 1 \\ z = s \\ u = t \end{cases}$$

■

Kommentarer

- Man kan, men behöver inte, införa en parameter för den fria variabeln, i detta fall ex.vis $t := u$.
- Antalet fria variabler är lika med antalet parametrar och detta antal är dimensionen på lösningen (lösningsrummet).
- Vilka variabler som är fria respektive bundna kan variera men inte *antalet*.

En tillämpning

I elläran uppkommer lätt stora ES.

Exempel 1.10 För en ström I i en parallellkoppling med ett motstånd i varje gren kan de tre uppkomna strömmarna I_k , $k = 1, 2, 3$ ses som obekanta/variabler, givet att de tre resistanserna är kända. Vi får

$$\begin{cases} I_1 + I_2 + I_3 = I \\ R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0 \\ R_1 I_1 - R_3 I_3 = 0 \end{cases} \text{ på matrisform } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & I \\ R_1 & R_2 & 0 & 0 \\ R_1 & 0 & R_3 & 0 \end{array} \right]$$

Av praktiska skäl finns en entydig lösning, alltså 1 lösning, d.v.s. rang för koefficientmatris=rang totalmatris=antal variabler=3, något som vi borde komma fram till.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & I \\ R_1 & -R_2 & 0 & 0 \\ R_1 & 0 & -R_3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{smallmatrix} (-R_1) & (-R_1) \\ \leftarrow & \leftarrow \end{smallmatrix}} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & I \\ 0 & -R_2 - R_1 & -R_1 & -R_1 I \\ 0 & -R_1 & -R_3 - R_1 & -R_1 I \end{array} \right]$$

Genom fortsatta ERM:s fås

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & I \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_3 R_2 + R_1 R_3} \\ 0 & 1 & 0 & I \frac{R_1 R_3}{R_1 R_2 + R_3 R_2 + R_1 R_3} \\ 0 & 0 & 1 & I \frac{R_1 R_2}{R_1 R_2 + R_3 R_2 + R_1 R_3} \end{array} \right] \sim \begin{cases} I_1 = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \\ I_2 = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \\ I_3 = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1 R_2} \end{cases}$$

■

ES med parametrar

Exempel 1.11 Lös ekvationssystemet nedan för olika värden på a och b .

$$\begin{cases} x + ay = 6 \\ ax + 4y = b \end{cases}$$

Lösning: Vi får med eliminationsmetoden

$$\begin{cases} x = \frac{ab-24}{a^2-4} \\ y = \frac{6a-b}{a^2-4} \end{cases}$$

om $a \neq \pm 2$. Dessa två fall måste undersökas för sig. Med $a = -2$ får vi ES

$$\begin{cases} x - 2y = 6 \\ -2x + 4y = b \end{cases}$$

som genom elimination blir

$$\begin{cases} x - 2y = 6 \\ 0 = b + 12 \end{cases}.$$

Alltså saknas lösning (0 lösningar), om $b \neq -12$, och om $b = -12$ är ES ekvivalent med att $x - 2y = 6$. Detta ger ∞ med lösningar närmare bestämt $(x, y) = (2y + 6, y)$, $y \in \mathbb{R}$. P.s.s. för $a = 2$ får vi att $b \neq 12$ ger 0 lösningar och för $b = 12$ ger det $(x, y) = (2y - 6, y)$, $y \in \mathbb{R}$.

■

Exempel 1.12 Lös ES för olika parametrar a och b

$$\begin{cases} -x - ay + 2z = 6 \\ ax + y + 2z = b \\ x - 2z = -5 \end{cases}$$

Lösning: Som totalmatris

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & a & 2 & 6 \\ a & 1 & 2 & b \\ 1 & +0 & -2 & -3 \end{array} \right]$$

■

2

Grundläggande algebra