

Lösningförslag till tentamen vid Chalmers tekniska högskola i matematik, kurskod LMA 212, för DAI och EI, fredag e.m. 20111021

1. Beräkna...

$$z = \frac{4j+3}{7+j} \cdot \frac{7-j}{7-j} = \frac{1}{2} + \frac{j}{2} \Rightarrow \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}, |z| = \sqrt{(1/2)^2 + (1/2)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ och } \arg z = \frac{\pi}{4}.$$

2.

$$\begin{cases} x - 2z &= -2 \\ x + y - 3z &= 0 \\ -2x - y + 4z &= 1 \end{cases}.$$

(a) Lös ekvationssystemet...

$$\begin{cases} x - 2z &= -2 \\ x + y - 3z &= 0 \\ -2x - y + 4z &= 1 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1p

(b) Beräkna determinanten av koefficientmatrisen...

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \dots = -1.$$

(c) (För vilket värde på q är matrisen inversmatris till $\mathbf{A}$?)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & q & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & q+1 & 0 \\ 0 & -q & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E} \iff q = 0.$$

(d)

$$\det \mathbf{B} = -q - 1 = 0 \iff q = -1.$$

Lös matrisekvationen...

$$\mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

för $q = -1$.

3. Givet ekvationssystemet...

$$\begin{cases} x + y &= 1 \\ y &= 2 \\ 2x + y &= 4 \end{cases}.$$

(a) ES kan skrivas

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Den bästa (approxima) lösningen i Minsta kvadratmetodens mening fås genom att multiplicera med transponatet till $\mathbf{A}$ från vänster:

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix} \iff$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}.$$

(b) Felvektorn är $\mathbf{F} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ -2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$, så att medelfelet

$$\frac{|\mathbf{F}|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{8/3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

4. (a) $\overrightarrow{PQ} = (2, -1, 1)$ och $\overrightarrow{PR} = (1, 1, 2)$. En ekvation för planet som innehåller punkterna P , Q och R . En normalvektor $\mathbf{n}$ är (anti-)parallell med $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$.

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \dots = (-3, -3, 3) = -3(1, 1, -1) \implies \mathbf{n} = (1, 1, -1).$$

$$\mathbf{n} \cdot ((x, y, z) - \overrightarrow{OP}) = (1, 1, -1) \cdot ((x, y, z) - (1, 1, 2)) = x + y - z = 0.$$

(b) Linjen som går genom punkten S vinkelrätt mot planet har ekvationen

$$(x, y, z) = t\mathbf{n} + \overrightarrow{OS} = t(1, 1, -1) + (5, -1, 1)$$

som sätts in i planets ekvation.

$$\mathbf{n} \cdot (t(1, 1, -1) + (5, -1, 1) - (1, 1, 2)) = 0 \iff t = -1$$

som ger $(x, y, z) = -1(1, 1, -1) + (5, -1, 1) = (4, -2, 2)$, som är projektionspunkten (Svar).

5. (a) I den binomiska ekvationen, sätt $z = r e^{j\theta}$ och $8 = 8 \cdot e^{j(3\pi/2 + 2\pi n)}$.

$$z^3 = -8j \iff r^3 e^{3j\theta} = 8 \cdot e^{j(3\pi/2 + 2\pi n)} \iff \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{3\pi/2 + 2\pi \cdot n}{3}, \quad n = 0, 1, 2 \end{cases}$$

Vi sätter in ex.vis $n = 0, 1, 2$ och får tre rötter.

(b)

$$z_0 = 2j, z_1 = -\sqrt{3} - j, z_2 = \sqrt{3} - j.$$

(c)

$$z^3 + 8j = (z - 2j)(z - \sqrt{3} + j)(z + \sqrt{3} + j).$$

6. Vi börjar med att lösa ekvationen

$$f(z) := z^2 - (2 - 4j)z - (3 + 2j) = 0 \iff (z - (1 - 2j))^2 = (1 - 2j)^2 + 3 + 2j = -2j = (a + bj)^2 = a^2 - b^2 + 2abj.$$

Detta ger $a = 1$, $b = 1$ eller $a = 1$, $b = -1$, som ger $z_1 = -j$ och $z_2 = 2 - 3j$. Alltså är

$$f(z) = z^2 - (2 - 4j)z - (3 + 2j) = (z + j)(z - 2 + 3j).$$