



Lösningsförslag till Tentamen vid Chalmers tekniska högskola i matematik, kurskod LMA 212, för DAI och EI, onsdag e.m. 20120822

1.

$$z = \frac{j-7}{4+3j} \cdot \frac{4-3j}{4-3j} = \frac{-25+25j}{25} = -1+j$$

så att $\operatorname{Re} z = -1$, $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ och $\arg z = 135^\circ$ eller $3\pi/4$.

2.

$$\begin{cases} x - 3y + 4z = -4 \\ x + y - 3z = 0 \\ -2x - y + 4z = 1 \end{cases}$$

(a) Ekvationssystemet på matrisform

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & -4 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \end{array} \right] \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow (x, y, z) = (-1, 1, 0).$$

(b)

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \dots = -1$$

(c)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}.$$

3. Givet koordinaterna för tre punkter; $(x_1; y_1) = (1; 3)$, $(x_2; y_2) = (-1; 2)$ och $(x_3; y_3) = (1; 1)$.

(a) Vi får ES

$$\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Genom att multiplicera med $\mathbf{A}^T$ från vänster i båda led erhålls ES

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix}$$

Bäst anpassad linje har alltså ekvationen $y = 0 \cdot x + 2 = 2$ till de tre punkterna (med Minsta Kvadratmetoden).

(b) Medelfelet:

$$\mathbf{f} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \nu = \frac{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

4. Följande punkter, i ett ONH-system, är givna.

$$P = (3; 4; 4), Q = (4; 5; 8), \text{ och } R = (5; 9; 9).$$

(a) $\overrightarrow{PQ} = (1, 1, 4)$ och $\overrightarrow{PR} = (2, 5, 5)$

$$\cos \theta = \frac{(1, 1, 4) \cdot (2, 5, 5)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2} \sqrt{2^2 + 5^2 + 5^2}} = \frac{25}{\sqrt{18} \sqrt{54}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \theta = 30^\circ.$$

(b) En ekvation för planet Π , som innehåller punkterna P , Q och R behöver en normalvektor $\mathbf{n}$:

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (1, 1, 4) \times (2, 5, 5) = 3(5, -1, -1) = 3\mathbf{n}.$$

Ekvationen ges av

$$\mathbf{n} \cdot ((x, y, z) - (3, 4, 4)) = 5x - y - z - 7 = 0.$$

(c) Areal A på triangeln med hörn i P , Q och R är

$$A = \frac{1}{2} |3(5, -1, -1)| = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

5. (a) Lös ekvationen $z^4 + 4 = 0$...

$$z^4 = (r e^{4j\theta}) = -4 = 4 \cdot e^{j(\pi+2n\pi)} \iff \begin{cases} r^4 = 4 \\ 4\theta = \pi + 2n\pi \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = \pi/4 + n\pi/2 \end{cases}, \quad n = -1, 0, 1, 2$$

som ger

$$z_1 = 1 - i, z_2 = 1 + i, z_3 = -1 + i, z_4 = -1 - i.$$

(b) Polynomet $z^4 + 4$ som en produkt av två reella polynom av grad 2 kan fås direkt, utan resultatet i (a).

$$\begin{aligned} z^4 + 4 &= \{\text{K.K.}\} = (z^2)^2 + 2 \cdot z^2 \cdot 2 + 2^2 - 4z^2 = \\ &= (z^2 + 2)^2 - (2z)^2 = (z^2 + 2 - 2z)(z^2 + 2 + 2z). \end{aligned}$$

6. Polynomet $f(z)z^3 + 8$ har ett rationellt nollställe, som är ett av följande ± 1 , ± 2 , ± 4 eller ± 8 . Insättning ger att $f(-2) = -8 + 8 = 0$, så att $z - (-2) = z + 2$ är en faktor. Faktoruppdelning polynomet

$$f(z) = (z + 2)(z^2 - 2z + 4)$$

i reella polynom. Nu är

$$z^2 - 2z + 4 = 0 \iff z = 1 \pm \sqrt{1 - 4} = 1 \pm j\sqrt{3},$$

som ej är reella nollställena. Alltså är $f(z) \equiv z^3 + 8 = (z + 2)(z^2 - 2z + 4)$ faktouppdelningen i reella faktorer av lägsta möjliga grad.