Lösningsförslag till Tentamen vid Chalmers tekniska högskola i matematik, kurskod LMA 212, för DAI och EI, onsdag f.m. 20121024

1. (Beräkna $\operatorname{Im} z$, $|z|$ och $\arg z$)

$$z = \frac{4j+3}{4-3j} = \frac{4j+3}{4-3j} \cdot \frac{4+3j}{4+3j} = ... = j\,.$$

$\operatorname{Im} z = 1$, $|z| = 1$ och $\arg z = \pi/2$.

2. (Betrakta ekvationssystemet)

(a) (Lös ekvationssystemet.)

$$\begin{cases} x+y+3z &= 0 \\ y+2z &= 3 \\ 2x-y+2z &= 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \end{array}\right] *) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \end{array}\right] \sim$$

$$... \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \Longleftrightarrow \begin{cases} x &= -8 \\ y &= -7\,. \\ z &= 5 \end{cases}$$

(b) (Beräkna determinanten av koefficientmatrisen $\boldsymbol{A}$ i (a).) T.o.m. $*$) har vi bara multiplicerat en rad och därefter adderat till en annan rad. Detta ändrar inte på determinantens värde. Alltså

$$\det \boldsymbol{A} = \{*)\} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$$

(c) (För vilket reella tal k och m är matrisen inversmatris till koefficientmatrisen $\boldsymbol{A}$ i (a)?)

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} k(m-2) & 0 & 0 \\ 0 & 2k & 0 \\ k(2m-8) & 0 & 2k \end{bmatrix} = \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} k &= 1/2 \\ m &= 4 \end{cases}.$$

3. (a) (Bestäm den bästa (approximativa) lösningen i Minsta kvadratmetodens mening.)

$$\begin{cases} x &= 5 \\ x+3y &= 2 \\ -2x &= 5 \\ x+3y &= 2 \end{cases} \quad \text{som kan skrivas } \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} \Longrightarrow \underbrace{\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A}}_{=:\boldsymbol{C}} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{B}$$

och som med siffror blir

$$\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 4 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \boldsymbol{C}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 17 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 17 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

(b) (Beräkna medelfelet.) Felvektorn

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{A} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1/2 \end{bmatrix} - \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ och medelfelet är } \eta = \frac{\sqrt{\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{f}}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{9}}{2} = \frac{3}{2}\,.$$

4. Följande punkter, i ett ONH-system, är givna.

$$P = (1;4;2),\ Q = (2;2;1),\ R = (1;1;-1) \text{ och } S = (4;-1;3)\,.$$

(a) En ekvation för planet Π, som innehåller punkterna P, Q och R:

$$\boldsymbol{a} := \overrightarrow{PQ} = (1,-2,-1), \quad \boldsymbol{b} := \overrightarrow{PR} = (0,-3,-3), \quad \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (3,3,-3)$$

så att en normalvektor är $\boldsymbol{n} = (1,1,-1)$. Planets ekvation är då

$$\boldsymbol{n} \cdot ((x,y,z) - \overrightarrow{OP}) = (1,1,-1) \cdot ((x,y,z) - (1,4,2)) = x + y - z - 3 = 0\,.$$

(b) En ekvation för linjen som går genom punkterna T och S har en riktningsvektor $\overrightarrow{TS} = (4,-1,3) - (1,2,2) = (3,-3,1) =: \boldsymbol{v}$. Linjens ekvation på vektorform eller parameterform är då

$$\boldsymbol{r} = (x,y,z) = t \cdot (3,-3,1) + (4,-1,3) \text{ respektive } \begin{cases} x &= 3t+4 \\ y &= -3t-1\,, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z &= t+3 \end{cases}$$

(c) Den punkt som är skäringspunkt mellan linje och plan ges av

$$0 = x + y - z - 3 = -t - 3 \Longleftrightarrow t = -3\,.$$

Vi får skärningspunkten genom att sätta in $t = -3$ i linjens ekvation:

$$(x,y,z) = (-3) \cdot (3,-3,1) + (4,-1,3) = (-5,8,0)\,. \text{ Skärningspunkten är } (-5;8;0)\,.$$

5. Betrakta binomet $f(z) := z^4 + 4$.

(a) (Lös den binomiska ekvationen $f(z) = 0$)

$$z^4 + 4 = 0 \Longleftrightarrow r^4 e^{4\alpha j} = -4 = 4 \cdot e^{\pi j + 2\pi n j} \Longleftrightarrow \begin{cases} r^4 &= 4 \\ 4\alpha &= \pi + 2\pi n \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} r &= 4^{1/4} = 2^{1/2} = \sqrt{2} \\ \alpha &= \pi/4 + \pi n/2 \end{cases}$$

Insättning av $n = -1, 0, 1, 2$ ger

$$z_1 = 1 - j,\ z_2 = 1 + j,\ z_3 = -1 + j,\ z_4 = -1 - j\,.$$

(b) (Skriv polynomet $f(z)$ som en produkt av två reella polynom av grad 2.) Detta går genom att faktoruppdela $f(z)$ m.h.a. nollställena i (a) men man kan faktiskt lösa probelmet direkt med kvadratkomplettering.

$$z^4+4 = (z^2)^2+2^2 = (z^2)^2+2\cdot z^2\cdot 2+2^2-4z^2 = (z^2+2)^2-(2z)^2 = (z^2+2z+2)(z^2-2z+2)\,.$$

6. Faktoruppdela polynomet $g(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4.$ i förstagradspolynom. M.h.a. ledningen och att polynomet endast har reella koefficienter följer att $z = a \pm aj$ är nollställen och därmed är en faktor

$$(z-a-aj)(a-a+aj) = z^2 - 2az + 2a^2$$

så att

$$f(z) = (z^2 - 2az + 2a^2)(z+c)$$

för konstanter a och c., d.v.s.

$$z^3 - 4z^2 + 6z - 4 = z^3 - 2az^2 + cz^2 + 2a^2z - 2acz + 2a^2c$$

$$\iff \begin{array}{rrcl} & \text{VL} & & \text{HL} \\ z^3: & 1 & = & 1 \\ z^2: & -4 & = & c-2a \iff c = 2a-4 \\ z: & 6 & = & 2a^2-2ac = 2a^2-2a(2a-4) \iff 2a^2-8a+6=0 \iff a=1, \text{ eller } a=3\,. \\ 1: -4 & = & 2a^2c & \end{array}$$

Insättning av $a = 3$ ger $c = 2$ i första ekvationen. Insättning i sista ekvationen, ger $-4 = 2 \cdot 3^2 \cdot 2$, som är omöjligt. Insättning av $a = 1$ ger i de tre sista ekvationerna att $c = -2$. Således är

$$g(z) = g(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4 = (z^2 - 2z + 2)(z-2)\,.$$