Lösningsförslag till Tentamen vid Chalmers tekniska högskola i matematik, kurskod LMA 212, för DAI och EI, torsdag f.m. 20131024

1. $z = \dfrac{5+3j}{1+4j}$

   (a)
   $$z = \frac{5+3j}{1+4j} = \frac{5+3j}{1+4j} \cdot \frac{1-4j}{1-4j} = \frac{17-17j}{17} = 1 - j\,.$$

   (b) $\operatorname{Im} z = -1$,

   (c) $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$,

   (d) $\arg z = -\dfrac{\pi}{4}$.

   2p

2. (a) ES på matrisform

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 - t \\ z = t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}\,.$$

   1.5p

   (b) Determinanten av koefficientmatrisen $\boldsymbol{A}$ (a) är det $\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}| = 0$, eftersom lösningen på ES *inte* är entydig . 1p

3. Givet ekvationssystemet $\begin{cases} x - y & = 0 \\ -x + 2y & = 3 \\ -y & = 1 \end{cases}$ med matriserna

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   kan detta ES skrivas $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$

   (a) Lösning av ekvationssystemet ovan med Minsta kvadratmetoden:

$$\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{B} \Longrightarrow \boldsymbol{X} = (\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A})^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{B} \text{ där}$$

$$\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ och därmed } (\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{X} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   2p

   (b) Felvektorn $\boldsymbol{f}$ och Medelfelet η är

$$\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \frac{4}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ respektive } \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\,.$$

   2p

4. Linjen L: $\begin{cases} x & = t + 1 \\ y & = t + 1 \\ z & = 4t - 3 \end{cases}$, $\quad t \in \mathbb{R}$ och planet Π: $x + 4y + z + 7 = 0$ är givna.

   (a) Bestäm skärningspunkten mellan linjen L planet Π...

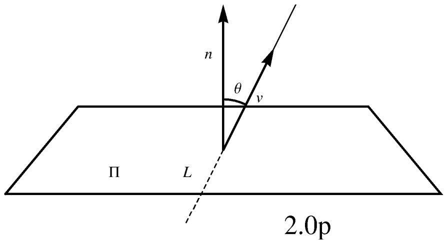
   $$\Pi: \; 0 = x + 4y + z + 7 = t + 1 + 4(t+1) + (4t - 3) + 7 = 9t + 9 \Rightarrow t = -1\,,$$

   som sätts in linjens ekvation: $(x; y; z) = (0; 0; -7)$. 2.0p

   (b) 2.0p

   Vinkeln mellan linjen L planet Π: Vi beräknar vinkeln θ mellan linjen och planets normalvektor:

$$\begin{cases} \boldsymbol{v} = (1, 1, 4) \\ \boldsymbol{n} = (1, 4, 1) \end{cases} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{v}|\,|\boldsymbol{n}|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = 60^\circ\,.$$



   2.0p

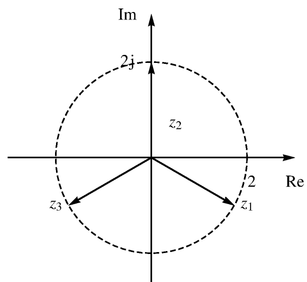
5. Givet binomet $f(z) = z^3 + 8j$.

   (a)

   Den binomiska ekvationen $f(z) = 0 \iff z^3 = -8j$. Sätt $z = re^{j\,\theta}$ och $-8j = 8\,e^{3\pi/2\,j}$, så att

$$\begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\theta = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi\, n \end{cases} \iff \begin{cases} r = 2 \\ \theta = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi\, n}{3}\,. \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} n = -1: & \theta = -\pi/6, \quad z_1 = 2e^{-\pi\, j/6} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{j}{2}\right) = \sqrt{3} - j \\ n = 0: & \theta = \pi/2, \quad z_2 = 2e^{\pi\, j/2} = 2j \\ n = 1 & \theta = 7\pi/6, \quad z_3 = 2e^{7\pi\, j/6} 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{j}{2}\right) = -\sqrt{3} - j \end{cases}$$



   3.5p

(b)

Som en produkt av tre polynom av grad 1: $f(z) = (z - 2j)(z - 3 + j)(z + 3 + j)$

1.5p

6. Polynomet $g(z) := z^3 + 5z^2 + 2z + 10$ har ett rent imaginärt nollställe. Sätt detta nollställe till jb. Insatt i ekvationen

$$0 = g(jb) = -jb^3 - 5b^2 + 2bj + 10 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Re}\, g(jb) & = -5b^2 + 10 = 0 \Longleftrightarrow b = \pm\sqrt{2}\,. \\ \text{Im}\, g(jb) & = -b^3 + 2b = 0 \end{cases}$$

Vi får två komplexkonjugerade rötter $\pm j\sqrt{2}$ och alltså faktorn $(z - j\sqrt{2})(z + j\sqrt{2}) = z^2 + 2\,.$ Faktoruppdelning av polynomet

$$g(z) = z^3 + 5z^2 + 2z + 10 = (z^2 + 2)(z + 5)$$

i reella polynom av lägsta möjliga grad. 4.5p

7. Betrakta polynomet $h(z) := z^2 + 2z + (4 - 4j)$...

(a) Lös ekvationen $h(z) = 0$...

$$\begin{aligned} h(z) &= z^2 + 2z + (4 - 4j) = \{\text{K.K.}\} = z^2 + 2z + 1 + 3 - 4j = 0 \Leftrightarrow \\ (z+1)^2 &= -3 + 4j =: (a + jb)^2 \\ -3 &= a^2 - b^2 \\ 4 &= 2ab \\ \sqrt{(-3)^2 + 4^2} &= 5 = a^2 + b^2 \\ &\Leftrightarrow \quad -3 + 5 = 2 = a^2 - b^2 + a^2 + b^2 = 2a^2 \Leftrightarrow a = \pm 1, \text{ och } b = \pm 2 \\ z + 1 &= \pm(1 + 2j) \Leftrightarrow z = 2j \text{ eller } z = -2 - 2j \end{aligned}$$

4.0p

(b) $h(z) = (z - 2j)(z + 2 + 2j)$ som en produkt av två förstagradspolynom. 1.0p