Lösningsförslag till Tentamen vid Chalmers tekniska högskola i matematik, kurskod LMA 212, för DAI och EI, onsdag e.m. 20140115

1. $z = \dfrac{5+7j}{6+j}$.

   (a) Förenkla z så långt som möjligt...

   $$z = \frac{5+7j}{6+j} = \frac{5+7j}{6+j} \cdot \frac{6-j}{6-j} = \frac{37+37j}{37} = 1+j\,.$$

   (b) $\arg z = 45°$.

   (c) $|z| = \sqrt{2}$.

   2p

2. Ekvationssystemet

   (a) Lös ekvationssystemet...

   $$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+2u &=& 1 \\ x+y+4z+u &=& 3 \\ 3y &=& 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

   Med $\dfrac{1}{4}u = t$ får vi lösingarna

   $$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-8t \\ y &=& 0 \\ z &=& \dfrac{1}{2}-t \\ u &=& 4t \end{array}\right. , \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

   (b) Tre bundna variabler (x, y och z) och en fri variabel (u).

   2.5p

3. Med matriserna $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ och $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, beräkna

   $$\det \boldsymbol{A} = 6, \qquad \det \boldsymbol{B} = 24,$$

   $$\det(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = 144, \qquad \det(\boldsymbol{A}^{-1}) = \frac{1}{6}\,.$$

   5.0p

4. Givet ekvationssystemet

   $$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3 \\ x-2y &=& -1 \\ -y &=& 1 \end{array}\right.$$

   (a) Lös ekvationssystemet med Minsta kvadratmetoden...

   $$\boldsymbol{A} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{A}^T\!\cdot\!\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{A}^T\!\cdot\!\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   $$(\boldsymbol{A}^t \cdot \boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

   $$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X} \Longrightarrow \boldsymbol{A}^T\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^T\cdot\boldsymbol{B} \Longleftrightarrow \boldsymbol{X} = (\boldsymbol{A}^T\cdot\boldsymbol{A})^{-1}\cdot\boldsymbol{A}^T\cdot\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} =: \hat{\boldsymbol{X}}$$

   2.5p

   (b) Beräkna medelfelet... Felvektorn är

   $$\boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{B} = (-1, 1, -2)$$

   och medelfelet är

   $$\eta = \frac{|(-1,1,-2)|}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{6}{3}} = \sqrt{2}\,.$$

   1.5p

5. Givet de fyra punkterna $P = (2;3;2)$, $Q = (1;1;-2)$, $R = (2;5;4)$ och $S = (2;3;-4)$ i $\mathbb{R}^3$...

   (a) Arean T av triangeln med hörn i P, Q och R är

   $$T = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|}{2} = \frac{|(4,2,-2)|}{2} = \frac{\sqrt{24}}{2} = \sqrt{6}\,.$$

(b) En ekvation för planet, som innehåller P, Q, och R ahr normalvektor $\boldsymbol{n} = (2, 1, -1)$. En ekvation är

$$\boldsymbol{n} \cdot ((x, y, z) - \overrightarrow{OP}) = (2, 1, -1) \cdot ((x, y, z) - (2, 3, 2)) = 2x + y - z - 5 = 0\,.$$

(c) Avståndet mellan planet i (b) och punkten S är

$$d = \frac{|2 + 3 - (-4) - 5|}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

4p

6. Binomet $z^4 + 4$ är givet.

(a)

$$z^4{+}4 \Longleftrightarrow z^4 = r^4{\cdot}e^{4j\theta} = 4{\cdot}e^{j\pi+2n\pi\,j} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 4 & = & r^4 \\ 4\theta & = & \pi(2n+1) \end{array}\right. \Longleftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} \cdot n \end{cases} \quad , n \in \mathbb{Z}$$

Detta ger $z_1 = 1 + j$, $z_2 = -1 + j$, $z_3 = -1 - j$ och $z_4 = 1 - j$.

(b) Faktoruppdelning

$$z^4{+}4 = (z{-}1{-}j)(z{-}1{+}j)(z{+}1{-}j)(z{+}1{+}j) = ((z{-}1)^2{-}j^2)((z{+}1)^2{-}j^2) = (z^2{-}2z{+}2)(z^2{+}2z{+}2)\,,$$

i två reella polynom av grad 2.

5.0p

7. Polynomet $f(z) := z^3 + z^2 - z + 15$ har ett nollställe med imaginärdel 2.

(a) Lös ekvationen $f(z) = 0$... Sätt $z_1 = a + 2j$ och $z_2 = a - 2j$, som två nollställen. Insättning i ekvationen $f(z) = 0$ ger det första nollstället ekvationerna

$$f(a{+}2j) = a^3{+}(1{+}6j)a^2{-}(13{-}4j)a{+}(11{-}10j) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{Re:} & a^3 + a^2 + 13a + 11 = 0 \\ \text{Im:} & 6a^2 - 4a - 10 = 0 \end{cases}$$

Imaginärdelen ger $a = 1$ eller $a = -5/3$. Insättning i realdelen visar att endast $a = 1$ är riktig.

(b) Faktoruppdelning av

$$f(z) \equiv z^3{+}z^2{-}z{+}15 = (z{-}1{-}2j)(z{-}1{+}2j)(z{+}b) = (z^2{-}2z{+}5)(z{+}b) = (z^2{-}2z{+}5)(z{+}3)$$

i reella polynom av så låg grad som möjligt. Detta ger svaret i (a), att $z_{1,2} = 1{\pm}2j$ och $z_3 = -3$ är de tre nollställena.

4.5p