

Lösningsförslag till Dugga för DAI1 och EI1, LMA 018, 20110912, 8.15-10.15

1. Givet följande matriser

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)	(F)
$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(a) Matriserna (A), (B) och (F) är trappstegsmatriser. 0.5p

(b) Matrisen (B) är reducerad matris. 0.5p

(c)

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)	(F)
rang 2	rang 1	rang 1	rang 2	rang 2	rang 2

1p

2. (a) (Överför följande ekvationssystem på matrisform, vidare till en reducerad matris och lös sedan systemet.)

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x - y + 3z &= 1 \\ x + 2z &= 2 \end{aligned} \iff \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

1.5p

(b) (Bestäm rangen av följande matris $\mathbf{A}$ för olika värden på parametern a .)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & a & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -4 & 5 \\ 1 & a & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} (-2) \\ \swarrow \\ \end{matrix}, \begin{matrix} (-1) \\ \swarrow \\ \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser att om $a = 1$, så är $\text{rang } \mathbf{A} = 2$ och för $a \neq 1$ är $\text{rang } \mathbf{A} = 3$ 1p

(c) Sätt $\text{typ } \mathbf{A} = m \times n$. Då måste $\text{typ } \mathbf{B} = n \times p$. Då är $\text{typ } (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = p \times m$. Vidare är $\text{typ } \mathbf{B}^T = p \times n$ och $\text{typ } \mathbf{A} = n \times m$. Därmed är $\text{typ } \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T = p \times m$, alltså är de av samma typ.

(d) Elementet på plats (k, i) i $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T$ är samma element på plats (i, k) i $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. Detta är produkten av rad i i $\mathbf{A}$ och kolonn k i $\mathbf{B}$, alltså

$$[a_{i,1} \ a_{i,2} \dots \ a_{i,n}] \cdot \begin{bmatrix} b_{1,k} \\ b_{2,k} \\ \dots \\ b_{n,k} \end{bmatrix} = \sum_{r=1}^n a_{i,r} b_{r,k}.$$

Motsvarande element på plats (k, i) i $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$ är produkten av rad k i $\mathbf{B}^T$ och kolonn i i $\mathbf{A}^T$, som är

$$[b_{1,k} \ b_{2,k} \dots \ b_{n,k}] \cdot \begin{bmatrix} a_{i,1} \\ a_{i,2} \\ \dots \\ a_{i,n} \end{bmatrix} = \sum_{r=1}^n b_{r,k} a_{i,r}.$$

3. Givet matrisekvationen $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} + 3\mathbf{X}$.

(a) (Lös ut matrisen $\mathbf{X}$.)

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A} - 3\mathbf{E})^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

1p

(b) Eftersom $\mathbf{E}$ är kvadratisk och vi har en subtraktion $\mathbf{A} - \mathbf{E}$, så måste $\mathbf{A}$ vara kvadratisk.

1p