Lösningsförslag till Dugga/Baskunskapstentamen vid Chalmers tekniska högskola i matematik, kurskod LMA 212, för DAI och EI, onsdag f.m. 20120111

1. Givet vektorerna $\boldsymbol{a} = (1, 1, 2)$, $\boldsymbol{b} = (2, -1, 1)$.

   (a)
   $$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = |(3,0,3)| = \sqrt{3^2+0^2+3^2} = 3\sqrt{2}\,.$$

   (b) Vinkeln θ mellan $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$:
   $$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \theta = 60^\circ$$

   (c)
   $$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (3,3,-3)$$

   (d) Låt n vara en sådan vektor. Då är den (anti-)parallell med $(3,3,-3)$ och har längd 1. $|(3,3,-3)| = 3\sqrt{3}$, så att $n = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$.

   4p

2. (a) Skalär produkt mellan två vektorer $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$ definieras som
   $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta$$
   där θ är vinkeln mellan vektorerna.

   (b) Den skalära produkten av två vektorer på komponentform (i ett ONH-system), $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1)$ och $\boldsymbol{b} = (x_2, y_2, z_2)$, är
   $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (x_1,y_1,z_1)\cdot(x_2,y_2,z_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2\,.$$

   (c) Determinanten
   $$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
   $$a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

   (d)
   $$\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

   4p

3. Givet två olika punkter P och Q i $\mathbb{R}^3$, skriv upp en ekvation för linjen genom punkterna, på vektorform.
   $$(x,y,z) = t\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r}_0 = t\,\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{OP}, \quad t\in\mathbb{R}$$

   2p

4. Givet matrisekvationen...

   (a)
   $$\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}+\boldsymbol{X} \Longleftrightarrow \boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{B} \Longleftrightarrow \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}\,.$$

   (b)
   $$\boldsymbol{X} = \underset{2\times 3}{\boldsymbol{B}}\cdot\underset{3\times 3}{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}}$$
   Typen för $\boldsymbol{A}$ är 3×3och för $\boldsymbol{X}$ är den 2×3.

   4p

5. $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$ är vektorer i $\mathbb{R}^3$. Förenkla

   (a)
   $$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2\,.$$

   (b)
   $$\boldsymbol{a}\times(2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}) =$$
   $$2\boldsymbol{a}\times b - \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a} =$$
   $$2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{0} = 2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}\,.$$

   4p

6. Givet ES
   $$\begin{aligned} x+y-2z &= a \\ 2x+z &= b \\ x-y+z &= c \end{aligned}\quad .$$

   (a) koefficientmatrisen är $\boldsymbol{A} := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ med determinant $\det\boldsymbol{A} = 4$. Alltså finns det exakt en lösning $(x;y;z)$. Alternaitv kan man visa att Rang $\boldsymbol{A} = 3$.

(b) Vi multiplicerar ihop matriserna.

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = p\begin{bmatrix} q+3 & 0 & 0 \\ 2q-2 & 4 & 0 \\ q-1 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{E} \iff q-1=0 \text{ och } 4p=1 \iff q=1 \text{ och } p=\frac{1}{4}\,.$$

3p

7. Givet tre punkter P, Q och R i $\mathbb{R}^3$, som inte ligger på en linje.

(a) Triangelns area är ex.vis

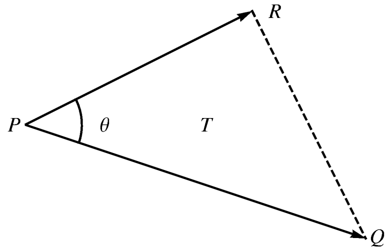
$$T = \frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}|\cdot|\overrightarrow{PR}|\sin\theta$$

där θ är vinkeln mellan $\overrightarrow{PQ}$ och $\overrightarrow{PR}$, enligt Areasatsen. Nu är, per definition,

$$|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{PQ}|\cdot|\overrightarrow{PR}|\sin\theta\,.$$

Alltså är

$$T = \frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}|\,.$$

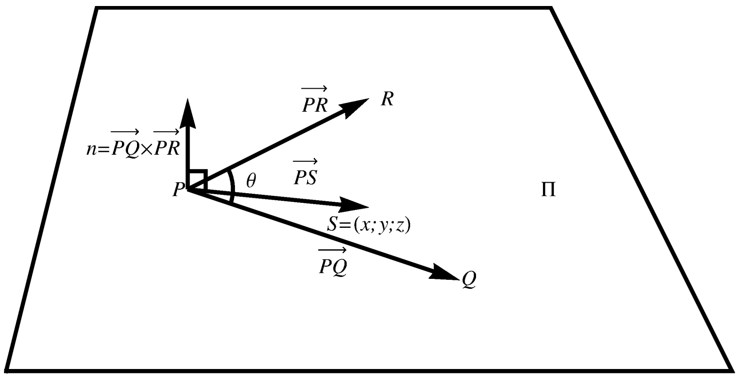


(b) Precis de punkter $S := (x;y;z)$, som ligger i planet Π uppfyller att $\overrightarrow{PS}\perp\boldsymbol{n}$, där n är en normalvektor t ill planet. En sådan normalvektor är ex.vis $\boldsymbol{n} := \overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}$. Planets ekvation kan då skrivas

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PS} = 0$$

eller utskrivet

$$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\cdot((x,y,z)-\overrightarrow{OP}) = 0\,.$$



4p