



Lösningssförslag till Dugga/Baskunskapstentamen vid Chalmers tekniska högskola i matematik, kurskod LMA 212, för DAI och EI, onsdag f.m. 20130116

1. Givet vektorerna $\mathbf{a} = (3, -8, 5)$, $\mathbf{b} = (-1, 1, -2)$.

(a)

$$\mathbf{a} + 7\mathbf{b} = (-4, -1, -9) \Rightarrow |\mathbf{a} + 7\mathbf{b}| = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2 + (-9)^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}.$$

(b) (Bestäm exakt vinkeln mellan $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$.) Kalla vinkeln θ .

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{-21}{\sqrt{98} \cdot \sqrt{6}} = -\frac{21}{7\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff \theta = 150^\circ$$

(c)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 3 & -8 & 5 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (11, 1, -5).$$

(d) Sätt $\mathbf{n} = (11, 1, -5)$. Den har längd $\sqrt{147} = 7\sqrt{3}$. En vektor mrf längd 1 ges av $\mathbf{c} = \pm \frac{1}{7\sqrt{3}} (11, 1, -5)$.

2. Givet matriserna $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$ och $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \end{bmatrix}$ med reella element.

(a) typ $\mathbf{A} = 2 \times 2$ och typ $\mathbf{B} = 2 \times 1$ Alltså är det bara $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ som är möjlig. Den produkten blir en matris av typ 2×1 .

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} \end{bmatrix}$$

(b) $\det \mathbf{A} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$.

(c)

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}} \begin{bmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{bmatrix}.$$

3. (Givet två olika punkter P och Q i $\mathbb{R}^3$, skriv upp en ekvation för linjen genom punkterna, på någon form.) Med $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$ kan linjens ekvation på vektorform skrivas

$$(x, y, z) = t \cdot \mathbf{v} + \overrightarrow{OP}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

4. (Antag att $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är två vektorer i $\mathbb{R}^3$ samma längd 4.)

(a) Förenkla...

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} - 2\mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - |\mathbf{b}|^2 + 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = 4^2 - 4^2 = 0.$$

(b) Förenkla...

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{b} - 2\mathbf{a}) = \mathbf{0} - 2\mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{0} - 2\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -2(\mathbf{a} \times \mathbf{b} - \mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}.$$

(c) (Antag dessutom att mellanliggande vinkel mellan $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är 60° .)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos 60^\circ = 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 8.$$

(d) (Antag dessutom att mellanliggande vinkel mellan $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är 30° .)

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin 30^\circ = 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 8.$$

5. (a)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X} + \mathbf{B} \iff (\mathbf{A} - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \iff \mathbf{X} = (\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1} \cdot \mathbf{B}.$$

(b) Insatt i matriekvationens VL:

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

och insatt i HL:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} + (\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1} \mathbf{B} &= (\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1} \cdot \mathbf{B} + (\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1} \mathbf{B} \\ &= (\mathbf{E} + \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{E}) (\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1} \cdot \mathbf{B}. \end{aligned}$$

6. (a) Arean av en triangel med två sidolängder a och b och mellanliggande vinkel θ är, enligt Areasatsen $T = \frac{ab \sin \theta}{2}$. Med en triangel med hörn i P , Q och R i $\mathbb{R}^3$ kan vi låta $a = |\overrightarrow{PQ}|$ och $b = |\overrightarrow{PR}|$ och θ mellanliggande vinkel till $\overrightarrow{PQ}$ och $\overrightarrow{PR}$. Definitionen av vektorprodukt säger att

$$|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = |\overrightarrow{PQ}| |\overrightarrow{PR}| \sin \theta.$$

Alltså är triangelns area

$$T = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|}{2}.$$

- (b) (Förklara hur planets ekvation kan härledas med dessa punkter för planet som innehåller de tre punkterna. Ge också ett en ekvation för planet uttryckt m.h.a. P , Q och R .) Punkterna $X := (x; y; z)$ i planet som innehåller de tre punkterna är de punkter sådana att $\overrightarrow{XP}$ är vinkelräta mot $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} =: \mathbf{n}$. D.v.s. den skalära produkten

$$\mathbf{n} \cdot ((x, y, z) - \overrightarrow{OP}) = 0$$

som alltså är planets ekvation.

