

Lösningssförslag till Dugga/Baskunskapstentamen vid Chalmers tekniska högskola i matematik, kurskod LMA 212, för DAI och EI, onsdag f.m. 20140115

Ansvarig lärare Reimond Emanuelsson, tel 031 772 5888/031 772 5892

1. Givet vektorerna $\mathbf{u} = (2, 3, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 5, 4)$.

(a)

$$|\mathbf{v} - 4\mathbf{u}| = |-7, -7, 0| = \sqrt{(-7)^2 + (-7)^2 + 0^2} = 7\sqrt{2}.$$

(b) Vinkeln θ mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{21}{14\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \theta = 30^\circ.$$

(c)

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \dots = (7, -7, 7).$$

(d) Samtliga vektorer $\mathbf{w}$, som är vinkelräta mot $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ och har längd 1 ges av

$$\mathbf{w} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1).$$

5p

2. Givet matriserna $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$ och $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \end{bmatrix}$ med reella element.

(a) Matrisprodukten $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ existerar inte eftersom typ $\mathbf{A} = 2 \times 2$ och typ $\mathbf{B} = 1 \times 2$. Men $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ är möjlig och är

$$\begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{2,1}b_{1,2} & a_{1,2}b_{1,1} + a_{2,2}b_{1,2} \end{bmatrix}$$

(b)

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$$

(c)

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}} \begin{bmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{bmatrix}$$

5p

3. Givet matrisen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ och matrisekvationen $\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{B}$.

(a) Matrisen $\mathbf{A}_v^{-1} := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{A}_v^{-1} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}.$$

(b) Lös matrisekvationen...

$$\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \implies \mathbf{A}_v^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{I} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A}_v^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{alltså } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Lös matrisekvationen...

$$\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \implies \mathbf{A}_v^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{I} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A}_v^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$\text{alltså } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

(d) Undersök om lösningarna i (b) och (c) är riktiga...

$$(a): \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Alltså riktig rot.

$$(b): \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Alltså falsk rot.

4p

4. (a) Lös ut $\mathbf{X}$ i matrisekvationen...

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} - 2\mathbf{X} \iff (\mathbf{A} + 2\mathbf{I}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \iff \mathbf{X} = (\mathbf{A} + 2\mathbf{I})^{-1} \cdot \mathbf{B}.$$

(b) Bestäm typerna för $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ och $\mathbf{X}$...

$$\text{typ } \mathbf{A} = 2 \times 2, \quad \text{typ } \mathbf{B} = 2 \times 3, \quad \text{typ } \mathbf{X} = 2 \times 3.$$

3p

5. Givet tre punkter P, Q, R och S i $\mathbb{R}^3$.

(a) Triangelns area

$$T = \frac{|\vec{PQ} \times \vec{PR}|}{2}$$

(b)

$$V = \frac{|(\vec{PQ} \times \vec{PR}) \cdot \vec{PS}|}{6}.$$

4p

6. Antag att $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ är två matriser med typ $\mathbf{A} = 3 \times 4$ och typ $\mathbf{B} = 3 \times 2$... Möjliga matrismultiplikationer är (g) $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}$ och (c) $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}$.

4p