

Lösningsförslag till Dugga 2 för DAI1 och EI1, LMA 212, 20111003, 8.15-10.15

1. (a) Determinanten av matrisen är

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \cdot (-2) \stackrel{\leftarrow}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot ((-5) \cdot 2 - (-4) \cdot 2) = -2.$$

- (b) Skalar produkt mellan två vektorer $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \theta$$

där θ är mellanliggande vinkel till vektorerna.

2. Förenkla...

- (a)

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{a}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{a} - 2\mathbf{b} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{0} - \mathbf{a} \times \mathbf{b} - 2 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

- (b)

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{a}) - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) - |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{a}|^2 - \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} - |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 = 0.$$

3. Punkterna $P = (1; 1; -3)$, $Q = (1; 3; -1)$, $R = (0; 2; -1)$ och $S = (3; 3; 1)$ är givna.

- (a) En riktningsvektor till linjen är $\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{PQ} = (0, 1, 1) =: \mathbf{v}$. En ekvation för linjen som går genom P och Q ges då av

$$(x, y, z) = t \cdot \mathbf{v} + \overrightarrow{OP} = t \cdot (0, 1, 1) + (1, 1, -3) \text{ eller } \begin{cases} x = 1 \\ y = t + 1 \\ z = t - 3 \end{cases} \text{ där } t \in \mathbb{R}.$$

- (b) Vinkeln θ mellan $\overrightarrow{PQ}$ och $\overrightarrow{PR}$:

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}| \cdot |\overrightarrow{PR}|} = \frac{(0, 1, 1) \cdot (-1, 1, 2)}{|(0, 1, 1)| \cdot |(-1, 1, 2)|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \theta = 30^\circ.$$

- (c) Arealen av triangeln med hörn i P , Q och R är

$$T = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|}{2} = \frac{(0, 2, 2) \times (-1, 1, 2)}{2} = \frac{|(1, -1, 1)|}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \text{ a.e.}$$

- (d) En normalvektor till planet ges av

$$\mathbf{n} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (1, -1, 1).$$

Planets ekvation ges då av

$$\mathbf{n} \cdot ((x, y, z) - (0, 1, 1)) = x - y + z + 3 = 0.$$

- (e) Volymen av tetraedern som har hörn i P , Q , R och S är

$$V = \frac{|(\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}) \cdot \overrightarrow{PS}|}{6} = \frac{4}{3} \text{ v.e.}$$

- (f) Avståndet mellan planet i d) och punkten S ges av

$$d = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PS}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

4. (a) Två plan $\begin{cases} x - z - 1 = 0, \\ 2x - y + z - 3 = 0 \end{cases}$ ger två ekvationer.

$$\begin{cases} x - z - 1 = 0, \\ 2x - y + z - 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z + 1 \\ y = 3z - 1 \\ z = z \end{cases}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

som är skärningslinjen mellan planen.

- (b) Skärningspunkten mellan linjerna ges av

$$\begin{cases} x = 2s = 2t - 2 \\ y = s + 3 = -t \\ z = 1 - s = t + 4 \end{cases} \iff \begin{cases} s = -2 \\ t = -1 \end{cases}$$

Skärningspunkten mellan linjerna är då $(x; y; z) = (-4; 1; 3)$.