

Lösningssförslag till Tentamen för Introduktionskursen till LMA 212 för DAI1 och EI1, 20120901

1. (Skriv på så enkel form som möjligt.)

(a)

$$-\frac{1}{6} - \frac{7}{3} + \frac{5}{2} = \{\text{MGN}\} = \frac{-1 - 14 + 15}{6} = 0.$$

(b)

$$\frac{\frac{1}{10} + \frac{1}{5}}{\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{6}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{15}{24}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{20}{9} = \frac{2}{3}.$$

(c)

$$\frac{\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x-y)^2}}{\frac{2}{x^2 - y^2}} = \frac{(x-y)^2 + (x+y)^2}{(x-y)^2(x+y)^2} \cdot \frac{(x-y)(x+y)}{2} = \frac{x^2 + y^2}{(x-y)(x+y)} \cdot \frac{1}{1} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}.$$

1p+2p+4p

2. (a) Kvadratkomplettera...

$$4x^2 + 8x + 3 = 4(x^2 + 2x + 1 - 1) + 3 = 4(x+1)^2 - 1.$$

(b) Faktoruppdelar...

$$4x^2 + 8x + 3 = 4(x+1)^2 - 1 = (2x+2)^2 - 1^2 = (2x+3)(2x+1).$$

(c) Lös ekvationen...

$$4x^2 + 8x + 3 = (2x+3)(2x+1) = 0 \iff \begin{cases} x = -3/2 \\ \text{eller} \\ x = -1/2 \end{cases}.$$

3p+2p+1p

3. Lös ekvationen...

$$\frac{2x}{x+1} = \frac{1}{x} - \frac{x-1}{x^2+x} \iff \frac{2x^2 - x - 1 - x + 1}{x^2+x} = \frac{2x^2 - 2}{x(x+1)} = 0 \iff x = 1.$$

3p

4. (a) Utveckla...

$$(a - 2 \cdot a^{-1})^3 = a^3 - 6a + \frac{12}{a} - \frac{8}{a^3}$$

3p

(b) Följande uttryck kan skrivas som en jämn kvadrat...

$$x^2 - 2 + 1/x^2 = x^2 + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2.$$

3p

5. Förenkla...

$$\frac{(8a^5/b^4)^3}{(2a^2b^{-2})^7} = \frac{2^9}{2^7} \cdot \frac{a^{15}}{a^{14}} \cdot \frac{1/b^{12}}{1/b^{14}} = 4ab^2.$$

4p

6. Man vet att $\sin v = 2/3$ och att v ligger i andra kvadrant. Beräkna

(a) $\cos v = \frac{\sqrt{3^2 - 2^2}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

(b) $\tan v = \frac{2}{\sqrt{5}},$

(c)

$$\cos 2v = \cos^2 v - \sin^2 v = \frac{5-4}{9} = \frac{1}{9}.$$

(d) $\sin(v - \pi) = -\sin(\pi - v) = -\sin v = -\frac{2}{3}.$

Teori

7. Pytagoras sats. (Ex.vis) Givet en rätvinklig triangel med katetrar a och b och hypotenusan c , så är $a^2 + b^2 = c^2$.

3p

8. (Bevisa identiteten) Vi utvecklar HL:

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a^3 - a^2b + ab^2) + (ba^2 - ab^2 + b^3) = a^3 + b^3.$$

2p

9. Givet identiteten $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

Skriv $\cos 2x = \{\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x\}$ som är ett uttryck, som innehåller $\sin x$ men som inte innehåller $\cos x$.

2p

Problem

10. Lös ekvationerna...

(a)

$$\tan(2x + 45^\circ) = 1 \iff 2x + 45^\circ = 45^\circ + 180^\circ \cdot n \iff x = 90^\circ \cdot n, n \in \mathbb{Z}.$$

i grader,

2p

(b)

$$\cos x = \sin 2x = \cos(\pi/2 - 2x) \iff \pm x = \pi/2 - 2x + 2\pi n \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \cdot n \text{ eller} \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

i radianer.

3p

11. Följande ekvation är en ekvation för en cirkel i planet.

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y - 4 = x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 + 2 \cdot y \cdot 2 + 4 - 4 - 4 = 0 \iff (x+1)^2 + (y-2)^2 = 9 = 3^2.$$

(a)

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y - 4 = x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 + 2 \cdot y \cdot 2 + 4 - 4 - 4 = 0 \iff (x+1)^2 + (y-2)^2 = 9 = 3^2.$$

Koordinaterna för dess medelpunkt $(x_0, y_0) = (-1, 2)$, och dess radie $r = 3$.
Ekvationen på formen $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, se ovan.

3p

(b) Cirkeln i (a) skär linjen $y = 2x + 1$. Koordinaterna för skärningspunkterna. Sätt in $y = 2x + 1$ i ekvationen. Detta ger

$$(x+1)^2 + (2x+1-2)^2 = (x+1)^2 + (2x-1)^2 = 5x^2 - 2x + 2 = 9 \iff x = -1 \text{ eller } x = \frac{7}{5}.$$

Motsvarande y -värden är $y = -1$ respektive $y = \frac{19}{5}$.

Svar: Punkternas koordinater är $(-1, -1)$ och $(\frac{7}{5}, \frac{19}{5})$

3p