

Determinanter 1

Ex 4.1

Vi tar resultaten från ex 1.2, ex 1.3 och ex 1.4.

	Ex 1.2	Ex 1.3	Ex 1.4
ES	$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2y - 4x = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -4x + 2y = -2 \end{cases}$
Koeff. matris	$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$	$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$
Rang koeff. matris	2	1	1
antal lösn.	1	0	∞
$\det A$	-1	0	0
Invers matris	$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$	existerar ej	existerar ej
Geometrisk tolkn.	Korsande linjer	Parallella icke-sammanfallande linjer	Parallella sammanfallande linjer

Sats

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B} \text{ har entydig lösn. } \mathbf{X} \iff \text{Rang } \mathbf{A} = n \iff \mathbf{A}^{-1} \text{ exist} \iff \det \mathbf{A} \neq 0 \quad (1)$$

där $\mathbf{A}$ är en kvadratisk matris av ordning n .

■

Vi bevisar denna sats endast för matriser av ordning 2 och först en hjälpsats.

Hjälpsats Givet matrisen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Radoperationerna ERM1-ERM3 påverkar determinanten på följande sätt. ERM1 ändrar tecken på determinanten, ERM2 ändrar determinanten med en faktor c , där $c \neq 0$ och ERM3 ändrar ingenting.

■

Bevis:

$$\text{ERM1: } \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} = a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = -\det \mathbf{A}.$$

Att multiplicera en rad med ett tal $c \neq 0$, d.v.s. ERM2 innebär att determinantens värde ändras med samma faktor c

$$\text{ERM2: } \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = ca_{11}a_{22} - ca_{12}a_{21} = c \cdot \det \mathbf{A}.$$

$$\begin{aligned} \text{ERM3: } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot c &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + ca_{11} & a_{22} + ca_{12} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22} + ca_{12}) - a_{12}(a_{21} + ca_{11}) = \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det \mathbf{A}. \end{aligned}$$

■

Kommentarer

- Observera att om $\mathbf{A} \sim \mathbf{A}'$ så gäller att $\det \mathbf{A} \neq 0 \iff \det \mathbf{A}' \neq 0$ eftersom determinanterna endast kan skilja sig på tecken (ERM1) och konstanter $c \neq 0$ (ERM2).
- Man kan visa att $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$.

För en matris av ordning 2 är det enkelt:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ \text{och} \\ \det \mathbf{A}^T &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{aligned}$$

och alltså lika.

- $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$ gör att man kan operera med ERM1-ERM3 på kolonnerna med samma påverkan på determinanten, som när man opererar med ERM1-ERM3 på raderna.

Bevis av satsen för matriser av ordning 2: I stället för att bevisa 4 ekvivalenser d.v.s. 8 implikationer, så bevisar vi detta så här

$$\det \mathbf{A} \neq 0 \stackrel{\text{I}}{\Rightarrow} \mathbf{A}^{-1} \text{ existerar} \stackrel{\text{II}}{\Rightarrow} \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \text{ har entydig lösning} \stackrel{\text{III}}{\Rightarrow} \text{Rang } \mathbf{A} = 2 \stackrel{\text{IV}}{\Rightarrow} \det \mathbf{A} \neq 0$$

I Antag att $\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Då ges inversmatrisen av

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

II Antag alltså att $\mathbf{A}^{-1}$ existerar.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \iff \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B},$$

som är den entydiga lösningen.

III Bevisat tidigare.

IV Antag att rangen för koefficientmatrisen = 2. Låt $\mathbf{A}'$ var motsvarande matris på reducerad form, d.v.s. $\mathbf{A} \sim \mathbf{A}'$. Då är $\det \mathbf{A}' = 1 \neq 0$. Eftersom radoperationerna endast ändrar determinanten med en konstant $\neq 0$, så är $\det \mathbf{A} \neq 0$.

■

Kommentarer:

- Satsen ovan gäller för matriser av godtycklig ordning, likaså resultaten i hjälpsatsen.
- Antag att $\mathbf{A}$ är en kvadratisk matris av ordning n . Att till skillnad från ERM2, multiplicera inte bara en rad, utan *hela* matrisen med ett tal c och sedan beräkna determinanten gör att

$$\det(c \cdot \mathbf{A}) = c^n \cdot \det \mathbf{A}.$$

Detta beror på att termerna i $\det \mathbf{A}$ är av typ $\pm a_{1p_1} \cdot a_{2p_2} \cdot \dots \cdot a_{np_n}$, och elementen i $c\mathbf{A}$ är ca_{jk} . Alltså blir termerna

$$\pm c a_{1p_1} \cdot c a_{2p_2} \cdot \dots \cdot c a_{np_n} = \pm c^n a_{1p_1} \cdot a_{2p_2} \cdot \dots \cdot a_{np_n}.$$

Determinant för matriser av typ 3×3 (ordning 3)

Ex 4.2

I ex. 1.7 har vi en kvadratisk koefficientmatris. Då kan man beräkna matrisens determinant Dessutom har vi entydig lösning på ett motsvarande ES. Koefficientmatrisen och HL är

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ respektive } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Av ovanstående exempel ligger det nära till hands att $\det \mathbf{A} \neq 0$. Frågan är nu hur den beräknas. Man kan beräkna denna determinant genom att *utveckla den längs godtycklig rad eller kolonn*. Vi väljer här andra rad.

$$\det \mathbf{A} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = \dots = 2$$

Allmänt är determinanten av en matris av ordning 3 (Här utvecklat längs rad 2.)

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{21}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23}(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Speciellt är

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33},$$

eftersom övriga $5 = 6 - 1$ termer innehåller en faktor 0.

Ex 4.3 Vi beräknar nu determinanten av

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

genom att utnyttja ERM1 och ERM3. Vi börjar med att byta plats på 1:a och 2:a rad.

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-2) \downarrow \cdot (-3) \downarrow = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} \cdot (-2) \downarrow =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (1 \cdot 1 \cdot (-2)) = 2.$$

En räkneregel för determinanter

Givet två kvadratiska matriser $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$, av samma ordning, säg n . Då gäller

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}. \quad (2)$$

Likheten är svår att bevisa för matriser av godtycklig ordning. För två determinanter av ordning 2 blir (övning)

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} = a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} + a_{11}a_{22}b_{11}b_{22}.$$

Hjälpsats

- i Genom att enbart använda ERM1 och ERM2 kan man få $\mathbf{A} \sim \mathbf{A}'$, där $\mathbf{A}'$ är en trappstegsmatris.
- ii För kvadratiska matriser $\mathbf{A}$ och $\mathbf{A}'$ är som ovan gäller att $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}'$, sånär som på tecken.

■

Sats Givet två kvadratiska matriser av samma ordning, n . Då är

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}. \quad (3)$$

■

Bevis: Vi bevisar det längre fram m.h.a. elementära matriser (Se sidan 59 ff).

■

Cramers regel

I en matrisekvation $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ med typ $\mathbf{A} = 3 \times 3$ och $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ kanske man bara är intresserad av att beräkna en av de okända, säg x_2 . Då kan x_2 beräknas m.h.a. determinanter. Byt ut kolonn 2 i $\mathbf{A}$ mot HL och kalla denna matris $\mathbf{A}_2$. då är

$$x_2 = \frac{\det \mathbf{A}_2}{\det \mathbf{A}}.$$

Vi bevisar detta först för en matrisekvation där typ $\mathbf{A} = 2 \times 2$ och $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$. Att bevisa att vi får ut x_2 på detta sätt, kan vi visa m.h.a. invers matris.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{-a_{21}b_1 + a_{11}b_2}{\det \mathbf{A}}.$$

Men täljaren är just $\begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix} = \det \mathbf{A}_2$ och beviset är klart.

För en matrisekvation

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

där

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

kan x_k beräknas genom att i $\mathbf{A}$ byta kolonn k mot $\mathbf{B}$. Kalla denna matris $\mathbf{A}_k$. Mer exakt är

$$x_k = \frac{\det \mathbf{A}_k}{\det \mathbf{A}}.$$

Bevis: Vi bevisar det i fallet $k = 1$. För allmänt k bevisas det väsentligen på samma sätt.

$$\det \mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ (a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n) & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n) & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Genom att multiplicera kolonn 2 med $-x_2$, kolonn 3 med $-x_3$, ..., och till sist kolonn n med $-x_n$ och sedan addera till kolonn 1 får vi

$$\det \mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = x_1 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = x_1 \cdot \det \mathbf{A}.$$

Dett är ekvivalent med att $x_1 = \frac{\det \mathbf{A}_1}{\det \mathbf{A}}$.

—

Ex 4.4 Givet ES

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - 2y + z = 3 \\ 3y + z = 4 \end{cases}.$$

Beräkna x .

Lösning: Sätt

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \text{ och } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Byt 1:a kolonn i $\mathbf{A}$ mot HL (eftersom x är första element av x, y, z) och kalla denna matris $\mathbf{A}_1$. Cramers regel ger då att

$$x = \frac{\det \mathbf{A}_1}{\det \mathbf{A}} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-9}{-6} = \frac{3}{2}.$$

Definition av determinant av godtycklig ordning n

Ex 4.5 Givet listan $(p_1, p_2, p_3) = (3, 1, 2)$. Detta är en permutation av $(1, 2, 3)$. Antalet inversioner är antalet pravisade byten av p_1, p_2 och p_3 som behövs för att få $(1, 2, 3)$. Vi skriver upp dessa här:

$$(3, 1, 2) \sim (1, 3, 2) \sim (1, 2, 3)$$

Alltså är $\text{inv}(3, 1, 2) = 2$. Detta säger i sin tur att motsvarande term i $\det \mathbf{A} = \det((a_{jk})_{3 \times 3})$ är $(-1)^2 a_{13} a_{21} a_{32} = a_{13} a_{21} a_{32}$.

Definition av determinant Givet matrisen $\mathbf{A} = (a_{jk})_{n \times n}$. Då är dess determinant

$$\det \mathbf{A} = \sum_{(p_1, p_2, \dots, p_n)} (-1)^{\text{inv}(p_1, p_2, \dots, p_n)} a_{1 p_1} a_{2 p_2} \dots a_{n p_n},$$

där summationen är över alla permutationer av $(1, 2, \dots, n)$.

Kommentarer

- Antalet permutationer av $(1, 2, 3)$ är $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Läses 3-fakultet. Antalet permutationer av $(1, 2, \dots, n)$ är $n!$ ett tal som växer fort med n . Ex.vis är $7! = 5040$ och $10! = 3\,628\,800$.
- Man kan lika väl summera över permutationer av radindexen (ej uppenbart). Detta förklarar att $\det(\mathbf{A}^T) = \det \mathbf{A}$ (sid 1).