

Kapitel 1 Grundläggande begrepp

Olika talmängder

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$.

är exempel på "standard"beteckningar av mängder. Ex.vis är

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\},$$

$$\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \dots\},$$

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\},$$

$$\mathbb{Q} = \{t/n, t, n \in \mathbb{Z} \text{ där } n \neq 0\},$$

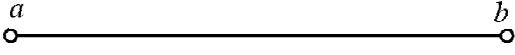
$$\mathbb{R} = \text{Mängden av alla reella tal}, \quad \mathbb{C} = \text{Mängden av alla komplex tal} = \{z = x + jy : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

För dessa mängder gäller bl.a. att

$$\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Intervall

Intervall betyder delintervall till $\mathbb{R}$.

	Öppet intervall,	$(a, b) = \{x : a < x < b\}$
	Halvöppet eller halvslutet intervall,	$(a, b] = \{x : a < x \leq b\}$
	Halvöppet eller halvslutet intervall,	$[a, b) = \{x : a \leq x < b\}$
	Slutet intervall,	$[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$

För sträng olikhet $<$ kan a och b vara $-\infty$ respektive $(+)\infty$. Då är intervallet obegränsat, annars begränsat, d.v.s. om a och b är reella tal.

Ex.vi för intervall $[a, b)$ kan b vara ∞ . Det är då slutet och obegränsat.

Det sista intervallet $[a, b]$ är slutet och begränsat och kallas *kompakt*.

Lite logik

Exempel 1.1 (Implikation och ekvivalens) Påstående. Alla mina cyklar är röda.

Alltså om en cykel är min, så är den röd, eller kortare skrivet som

$$\text{Cykel är min} \implies \text{cykeln är röd.} \quad (1)$$

" $\implies$ " läses "medför att" eller "implicerar". Ovan är en utsaga. Den *omvända* utsagan är

Cykeln är min $\iff$ cykeln är röd ,

(och är inte sann). Vi har därmed ingen *ekvivalens*, " $\iff$ ".

Man kan ekvivalent skriva den första utsagan (1) genom att använda negationen till VL och HL. Då vänds implikationspilen:

Cykeln är inte min $\iff$ cykeln är inte röd .

≡

Exempel 1.2 Lös ekvationen $\sqrt{x} = -1$.

Lösning: Genom att kvadrera får vi $x = 1$, som efter insättning i den ursprungliga ekvationen visar sig vara falsk. Förklaringen är att vi har bara " $\implies$ ":

$$\sqrt{x} = -1 \implies x = 1$$

och alltså inte " $\iff$ ". Implikationen " $\iff$ " kräver att det vänstra ledet är $\pm\sqrt{x} = -1$.

≡

Antag att A är en ekvation i variabeln x och B är utsagan att $x = 1$.

$A \implies B$ betyder att om A har en rot x så är den $x = 1$ men kan vara falsk.
 $A \iff B$ betyder att en rot är $x = 1$ men det kan finnas fler.
 $A \iff B$ betyder att om A har en rot x så är den $x = 1$ och den är riktig.

Exempel 1.3 Antag att a , b och c är sidolängder i en (plan) triangel. Pytagoras sats säger att

$$a \perp b \implies a^2 + b^2 = c^2 .$$

Omvändningen till Pytagoras sats är

$$a \perp b \iff a^2 + b^2 = c^2 ,$$

och är också sann. Exempel på pytagoreiska heltalstripplar (a, b, c) är $(3, 4, 5)$ och $(20, 21, 29)$.

≡

Lite grundläggande begrepp inom elementär algebra

Exempel 1.4

$$\frac{4x^3 - xy^2}{2x + y}$$

är ett uttryck.

$$\frac{4x^3 - xy^2}{2x + y} = 2xy + 1$$

är en ekvation.

$$2x + 6y = 2(x + 3y)$$

är en identitet och likhetstecknet skrivs ibland $\equiv$.

≡

Grundläggande räknelagar (OH)

Parantes och minustecken

$$a + (-b) = a - b, \quad a - (-b) = a + b, \quad a \cdot (-b) = a(-b) = -ab, \quad (-a) \cdot (-b) = ab$$

$$-(a - b) = b - a, \quad \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}.$$

Vi bevisar den näststista likheten:

$$-(a - b) = (-1) \cdot (a - b) = \{\text{distributiva lagen}\} = (-1) \cdot a + (-1) \cdot (-b) = -a + b = b - a.$$

Lite om prioritet

Exempel 1.5 Multiplikation går före addition.

$$2 + 3 \cdot (4 - 5) = 2 + 3 \cdot (-1) = 2 + (-3) = 2 - 3 = -1.$$

≡

Exempel 1.6 Potens går före multiplikation.

$$-3^2 = -9 \text{ och } (-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9 \text{ och}$$

$$x \cdot y^{1/2} = x \cdot \sqrt{y} = x\sqrt{y}.$$

≡

Bråkräkning

Exempel 1.7

Termvis division: $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$, men $\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$.

Skriva på MGN: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d} + \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{b} = \frac{ad+bc}{bd}$

$$\frac{31}{14} - \frac{12}{7} + \frac{3}{2} = \frac{31 - 12 \cdot 2 + 3 \cdot 7}{14} = \frac{28}{14} = 2.$$

≡

Mer om bråk, dubbelbråk

Exempel 1.8 Förenkla...

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 5}{\frac{4}{5} \cdot 3 \cdot 5} = \frac{5}{6}, \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot b \cdot d}{\frac{c}{d} \cdot b \cdot d} = \frac{\frac{a}{\cancel{b}} \cdot \cancel{b} \cdot d}{\frac{c}{\cancel{d}} \cdot b \cdot \cancel{d}} = \frac{ad}{bc}.$$

Följande likheter (identiteter) är sanna för alla a, b, c och c skilda från noll.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{d}{b}}{\frac{c}{a}} = \frac{\frac{d}{c}}{\frac{b}{a}} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}.$$

Ett dubbelbråk kan (alltid) reduceras till ett enkelbråk.

Exempel 1.9 Förenkla

$$\frac{\frac{2}{3}}{4} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{2}{4 \cdot 3} = \frac{1}{6}.$$

och förenkla

$$\frac{2}{\frac{3}{4}} = \frac{2 \cdot 4}{\frac{3}{4} \cdot 4} = \frac{8}{3}.$$

Huvudbråkstrecket, som är längst, står på samma höjd som likhetstecken och minustecken:

$$= - \frac{\frac{a}{b}}{c}$$

Exempel 1.10 Förenkla...

$$\frac{\frac{15a^2}{(2b)^3}}{\frac{3a}{4b^3}} = \frac{\frac{15a^2}{8b^3}}{\frac{3a}{4b^3}} = \frac{15a^2 \cdot 4b^3}{8b^3 \cdot 3a} \dots = \frac{5a}{2}.$$

Inverterat värde och bråk

Exempel 1.11

Gäller följande implikation

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 0 \implies \frac{b}{a} + \frac{d}{c} = 0,$$

där vi förutsätter att $a, b, c, d \neq 0$?

Lösning:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 0 \implies \frac{a}{b} = -\frac{c}{d} \implies \frac{b}{a} = -\frac{d}{c} = 0 \implies \frac{b}{a} + \frac{d}{c} = 0,$$

alltså ja. Dessutom gäller ekvivalens.

≡

Mer om minustecknet

Exempel 1.12

$$-\frac{x-3}{5-2y} \neq \frac{-x-3}{5-2y}$$

men

$$-\frac{x-3}{5-2y} = \frac{-(x-3)}{5-2y} = \frac{3-x}{5-2y} = \frac{x-3}{-(5-2y)} = \frac{x-3}{2y-5}.$$

≡

Exempel 1.13 Att förkorta...

$$\frac{4x-6y}{2a-4b} = \dots = \frac{2x-3y}{a-2b} = \{\text{även}\} = \frac{3y-2x}{2b-a}.$$

≡

Exempel 1.14 Lös ekvationen (Vi behöver här konjugatregeln $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.)

$$\frac{4x^2 - 1}{x + 1} = \frac{2x^2 - x}{x}.$$

Lösning: Vi ser att p.g.a. VL, måste $x + 1 \neq 0$, d.v.s. $x \neq -1$ och p.g.a. HL måste $x \neq 0$. Vi kan faktorisera VL:s täljare $4x^2 - 1 = (2x)^2 - 1^2 = (2x - 1)(2x + 1)$. Likaså kan vi förkorta x mellan täljare och nämnare i HL. Eftersom x måste vara $\neq 0$ går det senare bra. Det ger

$$\frac{4x^2 - 1}{x + 1} \equiv \frac{(2x - 1)(2x + 1)}{x + 1} = 2x - 1.$$

Vi ser att *innan* $2x - 1$ förkortas, undersöker vi om $2x - 1 = 0$ ger en rot. Svaret är ja, d.v.s. $x = 1/2$ är en rot (ty VL=HL=0). *Därefter* förkortas $2x - 1$ och vi får

$$\frac{2x + 1}{x + 1} = 1 \Leftrightarrow 2x + 1 = x + 1 \Leftrightarrow x = 0$$

men $x \neq 0$, så att enda roten är $x = 1/2$.

≡