

Föreläsningar av kapitel 10

Summasymbol

Exempel 10.1 Skriv med summasymbol

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 3) + (2n - 1).$$

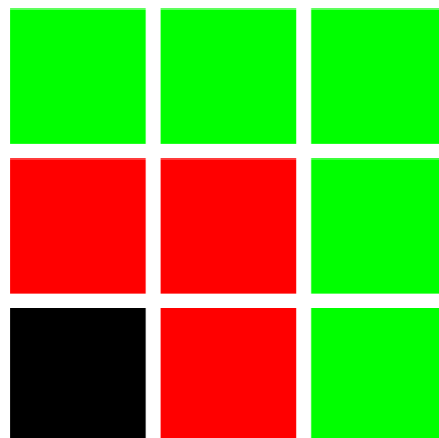
Lösning: Ex.vis är första termen $1 = 2 \cdot 1 - 1$ och andra termen $2 \cdot 2 - 1$. Ett udda tal kan skrivas $2k - 1$, där k är ett heltal. Detta är summan av de n första udda positiva heltalen, som kan skrivas

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) =: S(n).$$

≡

Kommentarer

- I $\sum_{k=1}^n (2k - 1)$ kallas termen $2k - 1$ summand, 1 och n undre respektive övre index och k löpande index. Denna bokstav kan bytas mot vilken annan bokstav (förutom n) utan att betydelsen ändras. Genom bytet $j = k - 1$ blir summan $\sum_{j=0}^{n-1} (2j + 1)$.
- Ex.vis är $S(3) = 1 + 3 + 5 = 9$ och $S(4) = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$. Vi ser att summorna är heltalskvadrater. Man kan visa att $S(n) = n^2$, se figur nedan.
- Man kan rita dessa summor $S(n)$.



$$1 + 3 + 5 = 3^2$$

Exempel 10.2 Antal fotbollsmatcher i en enkelserie med 16 lag är

$$15 + 14 + 13 + \dots + 3 + 2 + 1 =: S_1(15).$$

Med summasymbol $\sum_{k=1}^{15} k$. Man kan räkna ut summan så här:

$$\begin{aligned} 2 \cdot S_1(15) &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + \\ &\quad 15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = \\ &= 16 \cdot 15 \text{ så att } S_1(15) = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120. \end{aligned}$$

≡

Exempel 10.3 (Geometrisk summa) Man kan visa att

$$S(n) := \sum_{k=0}^{n-1} ax^k = a \frac{x^n - 1}{x - 1} \quad (1)$$

för $x \neq 1$. Vi bevisar det.

$$x \cdot S(n) = a(x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} + x^n)$$

$$S(n) = a(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}).$$

Genom att ledvis subtrahera får vi

$$(x - 1) \cdot S(n) = a(x^n - 1).$$

Eftersom vi antar att $x \neq 1$ kan vi dividera med $x - 1$ och får då (1).

≡

Exempel 10.4 Om $|x| < 1$ kommer x^n att konvergera mot 0. Om vi lägger ihop ett obegränsat antal termer i (1) med $|x| < 1$ får vi

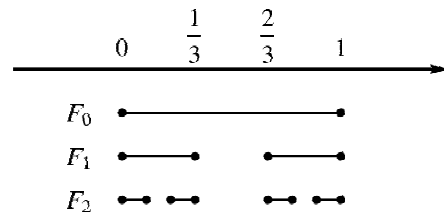
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a \sum_{k=0}^n x^k = a \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{x^n - 1}{x - 1} = a \cdot \frac{0 - 1}{x - 1} = \frac{a}{1 - x}.$$

Ex.vis är

$$\frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} (2/3)^k = \frac{1/3}{1 - 2/3} = 1.$$

≡

Exempel 10.5 (Kantormängden)



Vi tar bort den mittersta tredjedelen av intervallet $[0, 1]$ och får kvar mängden

$$F_1 = [0/3, 1/3] \cup [2/3, 3/3]$$

P.s.s. tar vi bort den mittersta tredjedelen av intervallen $[0/3, 1/3]$ och $[2/3, 3/3]$ och får

$$F_2 = [0/9, 1/9] \cup [2/9, 3/9] \cup [6/9, 7/9] \cup [8/9, 9/9].$$

Vidare bildar vi $F_3, F_4, \dots, F_n, \dots$. Hur mycket har vi tagit bort? För att få F_1 har vi tagit bort intervallet $(1/3, 2/3)$ som har längden $1/3$. För att få F_2 tar vi bort ytterligare $2/9$. Totalt kommer vi att ta bort intervall av längd

$$1/3 + 2/9 + 4/27 + 8/81 + \dots = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} (2/3)^k = 1$$

enligt exempel 10.4 Alltså har vi tagit bort delintervall med sammanlagd längd 1, samma längd som $[0, 1]$. Betyder det att det inte finns något kvar? D.v.s. är $K = \bigcap_{k=0}^{\infty} F_k = \emptyset$? Svaret är, något överraskande, nej. Mängden K har längden 0 men innehåller

≡