

Föreläsningar av kapitel 3

Några Härledda identiteter

Kvadrerings-, kuberings- och konjugatregler

Konjugatregler

Exempel 3.1 Beräkna 98^2 .

Lösning: I konjugatregeln

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

väljer vi $a = 98$ och får

$$98^2 = b^2 + (98 - b)(98 + b)$$

Ett smart val av b är $b = 2$, som ger

$$98^2 = 2^2 + 96 \cdot 100 = 9604.$$

P.s.s.är

$$999^2 = 998001.$$

■

Exempel 3.2 Förenkla...

$$\frac{4x^3 - xy^2}{2x + y} = \frac{x(2x - y)(2x + y)}{2x + y} = x(2x - y).$$

Ytterligare två konjugatregler

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \text{ och } a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

■

Kvadrerings- och kuberingsregler

Vi har redan använt en kvadreringsregel i exempel 3.12. OH.

Exempel 3.3

$$x^2 - 6x + 9 = \{\text{kan skrivas}\} = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x - 3)^2$$

och kallas "jämn kvadrat".

■

Exempel 3.4 Utveckla...

$$(e^x + e^{-x})^2 = (e^x)^2 + 2e^x \cdot e^{-x} + (e^{-x})^2 = e^{2x} + 2e^{x-x} + e^{-2x} = e^{2x} + 2 + e^{-2x},$$

$$\text{och utveckla... } (2a - b)^3 = 8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$$

■

Exempel 3.5 Ex.vis är

$$(a - b)^2 = (-(b - a))^2 = (-1)^2 \cdot (b - a)^2 = (b - a)^2,$$

och

$$(a - b)^3 = (-(b - a))^3 = (-1)^3 \cdot (b - a)^3 = -(b - a)^3.$$

■

Exempel 3.6 (Faktoruppdelning) Följande uttryck är en jämn kvadrat. Faktoruppdel!

$$e^{2x} + 2e^x + 1 = (e^x)^2 + 2 \cdot e^x \cdot 1 + 1^2 \dots = (e^x + 1)^2.$$

■

Exempel 3.7 $x^2 - 6x + 8$ är ingen "jämn kvadrat" men vi kan "(kvadrat-)komplettera" genom att lägga till och dra ifrån en 1 :a:

$$x^2 - 6x + 8 = x^2 - 6x + 9 - 1 = (x - 3)^2 - 1.$$

Detta kallas att *kvadratkomplettera* (K.K.).

■

Exempel 3.8 (Kuberings- och konjugatregel) En riktig och en felaktig förenkling som ger samma (rätta) svar. Förenkla (rätt metod)

$$\frac{(a - b)^3 + 2a^3 + b^3}{a^3 + b^3} = \frac{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + 2a^3 + b^3}{(a + b)(a^2 - ab + b^2)} = \frac{3a(a^2 - ab + b^2)}{(a + b)(a^2 - ab + b^2)} = \frac{3a}{a + b}.$$

Förenkla (fel metod)

$$\frac{(a - b)^3 + 2a^3 + b^3}{a^3 + b^3} = \frac{a - b + 2a + b}{a + b} = \frac{3a}{a + b}.$$

■

Ekvationslösning

Exempel 3.9 Lös ekvationen

$$2x^2 = 5x.$$

Lösning: Detta är en andragradsekvation och kan lösas med $p - q$ formeln. Vi löser dock den genom att faktorisera

$$2x^2 = 5x \Leftrightarrow 2x^2 - 5x = x(2x - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ eller} \\ 2x = 5 \end{cases}$$

Svar: $x = 0$ eller $x = 5/2$.

■

Exempel 3.10 Ekvationen $2x^2 = 5$ kan ekvivalent skrivas $2x^2 - 5 = 0$ eller bättre $x^2 = 5/2$ med rötter $x = \pm\sqrt{5/2}$

■

Kommentarer

- Det är fel att förkorta x i båda led, *innan* roten $x = 0$ är verifierad.
- Utan konstantterm i andragradsekvationen löser man inte ekvationen med $p - q$ formeln.
- Inte heller ekvationer som saknar förstgradsterm (Exempel 3.10) löser man med $p - q$ formeln.

Vi kvadratkompletterade och faktorisera i exempel 3.7. Vi skall nu utnyttja det för bestämma polynomets nollställena.

Exempel 3.11 Vi kan gå vidare med exempel 3.7 och faktorisera

$$x^2 - 6x + 8 = x^2 - 6x + 9 - 1 = (x - 3)^2 - 1^2 = ((x - 3) - 1)((x - 3) + 1) = (x - 4)(x - 2).$$

Dessutom får vi nollställena till ekvationen $x^2 - 6x + 8 = 0$, som $x = x_1 = 2$ och $x = x_2 = 4$.

■

Exempel 3.12 Lös ekvationen $2x^2 = 5x - 3$.

Lösning: Denna ekvation kan lösas med $p - q$ formeln. Vi löser den dock med kvadratkomplettering, förkortat K.K.

$$2x^2 = 5x - 3 \Leftrightarrow 0 = 2x^2 - 5x + 3 = \{\text{K.K.}\} =$$

$$2(x^2 - 5/2x) + 3 = 2 \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{5}{4} + \left[\frac{5}{4} \right]^2 - \left[\frac{5}{4} \right]^2 \right) + 3 =$$

$$2(x - 5/4)^2 - \frac{25}{8} + 3 = 2(x - 5/4)^2 - \frac{1}{8} \Leftrightarrow (x - 5/4)^2 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{5}{4} \pm \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3/2 \text{ eller} \\ x = 1 \end{cases}$$

■

Vi skall se i exempel 0.15, att vi kan göra mer med K.K. än att finna nollställan.

Exempel 3.13 Vi löser nu en rotekvation. Lös ekvationen $\sqrt{2x+1} + 2 = x$.

Lösning: Vi kan kvadrera båda led och får

$$2x + 4\sqrt{2x+1} + 5 = x^2.$$

Vi blir alltså inte av med rottecknet. För att bli av med det, flyttar vi termen 2 från VL till HL. Vi får

$$\sqrt{2x+1} + 2 = x \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} = x - 2 \Rightarrow^* 2x + 1 = (x - 2)^2 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 3 = 0.$$

Denna ekvation har rötterna $x = 3 \pm \sqrt{6}$. P.g.a. att vi bara har implikation vid *, betyder det att vi har alla rötter bland $x = 3 \pm \sqrt{6}$. En eller båda kan dock vara falska. Innan * ser vi att VL är ≥ 0 , eftersom en rot " $\sqrt{}$ " alltid är ≥ 0 . Alltså måste motsvarande HL vara ≥ 0 . Insättning av $x = 3 + \sqrt{6}$ i HL ger $x - 2 = x = 1 + \sqrt{6} \geq 0$, som alltså är sann men insättning av $x = 3 - \sqrt{6}$ i HL ger $x - 2 = x = 1 - \sqrt{6} < 0$, som alltså är falsk. Svar $x = 3 + \sqrt{6}$.

■

Exempel 3.14 Lös ekvationen

$$\frac{2x+1}{x-1} + \frac{4x-1}{x} = \frac{x^2+2}{x^2-x}.$$

Vi flyttar termerna till VL och skriver på MGN.

$$\frac{5x^2 - 4x - 1}{x(x-1)} = 0.$$

Detta är ekvivalent med två villkor. Täljaren $= 0$ och nämnaren $\neq 0$.

Vi ser på MGN är nämnaren $x(x-1)$, så att $x = 0$ och $x = 1$ är uteslutna som rötter.

$$\text{Täljaren } 5x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1/5 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Svar $x = -1/5$.

■

Lösning av andragradsekvation, igen

Vi har redan skrivit om ett andragradspolynom med K.K. Man kan härleda $p - q$ formeln med K.K. som innebär att lösa ekvationen $x^2 + px + q = 0$.

$$x^2 + px + q \equiv (x + p/2)^2 - (p/2)^2 + q = 0 \Leftrightarrow x = -p/2 \pm \sqrt{(p/2)^2 - q}.$$

Exempel 3.15 Lös ekvationen $2x^2 = 5x - 3$.

Lösning: Vi kan skriva denna ekvation ekvivalent som

$$x^2 - (5/2)x + 3/2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4} \pm \sqrt{25/16 - 24/16} = \frac{5 \pm 1}{4} \Leftrightarrow x = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ \text{eller} \\ x = 1 \end{cases}$$

■

Polynom

Polynom av grad 3 och definition av polynom, OH .

Faktoruppdelning, Faktorsatsen

Vi har faktoruppdelat och samtidigt funnit nollställena till ett polynom (Ex 3.11).

Exempel 3.16 K.K. igen

$$f(x) := x^2 - 6x + 5$$

är ingen jämn kvadrat. Vi skall faktoruppdelat det och bestämma dess nollställena, för att illustrera Faktorsatsen. M.h.a. av K.K. får vi följande identiteter för $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 5 = (x - 3)^2 - 4 = (x - 3)^2 - 2^2 = \\ &= \{\text{konjugatregeln}\} = (x - 3 + 2)(x - 3 - 2). \end{aligned}$$

Alltså är $f(x) = (x - 1)(x - 5)$. Ekvationen $f(x) = 0$ kan därmed skrivas $(x - 1)(x - 5) = 0$, som är ekvivalent med att $x - 1 = 0$ eller $x - 5 = 0$, d.v.s. $x = x_1 = 1$ eller $x = x_2 = 5$. Vi ser att ex.vis är $x - x_1 \equiv x - 1$ en *faktor* till polynomet $f(x)$.

Teorem 1 (Faktorsatsen) Givet polynomet $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$. Då gäller ekvivalensen

$x = x_0$ är nollställe till $f(x)$, d.v.s. $f(x_0) = 0 \iff (x - x_0)$ är faktor till polynomet.

Kommentarer

- Satsen/teoremet säger alltså att $f(x) = (x - x_0)g(x)$, där $g(x)$ är ett polynom av en grad lägre än $f(x)$:s grad.
- Man kan visa att varje reellt polynom kan faktoruppdelas i reella polynom av *högst* grad 2 (typ $x^2 + \alpha x + \beta$) och n komplexa förstgradspolynom (typ $x - x_0$, där $x_0 \in \mathbb{C}$), om $\text{grad } f = n$.



Exempel 3.17 Polynomet $f(x) := 4x^3 - 16x^2 - 19x - 5$ har nollstället $x = 5$. Lös ekvationen $f(x) = 0$ och faktoruopdelar f i reella faktorer.

Lösning: Vi kan ansätta

$$4x^3 - 16x^2 - 19x - 5 = (x - 5)(4x^2 + 4x + 1) = \{\text{K.K.}\} = (x - 5)(2x + 1)^2.$$

Svar: Rötterna är $x = 5$ och $x = -1/2$, end dubbelrot. Faktoruopdelningen är $f(x) = (x - 5)(2x + 1)^2$.

