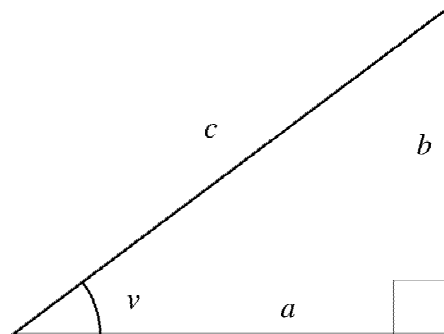


Föreläsningar kapitel 6

Trigonometri. Några samband



Teorem 1 (Pythagoras sats) För en rätvinklig, som i figuren, gäller

$$a \perp b \implies a^2 + b^2 = c^2 \quad (1)$$

Kommentarer Kommentar: Pytagoreiska (heltals)tripplar genereras av

$$a = x^2 - y^2, \quad b = 2xy, \quad c = x^2 + y^2.$$

Exempel 6.1 Givet talen $x = 5$ och $y = 2$. Detta ger $a = 21$, $b = 20$ och (alltså) $c = 29$, d.v.s.

$$21^2 + 20^2 = 441 + 400 = 841 = 29^2.$$

≡

Samband för *komplementvinkel*: Man ser att $\sin v = \cos(90^\circ - v)$ och $\sin(90^\circ - v) = \cos v$. Ex.vis Givet $v = 34^\circ$. Dess *komplementvinkel* är $90^\circ - 34^\circ = 56^\circ$.

Exempel 6.2 Givet en rätvinklig triangel med hypotenusa 10 och en katet 5. Beräkna

- (a) den andra katetens längd och
- (b) de trigonometriska funktionernas värde för vinkeln mellan dessa sidor.

Lösning:

- (a) Den andra katetens längd är

$$b := \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{2^2 - 1^2} = 5\sqrt{3}.$$

- (b) de trigonometriska funktionernas värden för vinkeln v mellan de två kända sidorna är

$$\cos v = \frac{a}{c} = \frac{1}{2}, \sin v = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan v = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}, \text{ och } \cot v = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

≡

Kommentarer

- I exempel 6.2 är vinkeln $v = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$.
- Vi kan beräkna de exakta trigonometriska värdena för vinklarna 45° , 30° och 60° m.h.a. en rätvinklig respektive en liksidig triangel.
- Vi har att $\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}$ och därmed $\cot v = \frac{\cos v}{\sin v}$. Vidare gäller att

$$\cos^2 v + \sin^2 v = 1, \quad \text{trigonometriska ettan.}$$

Enhetscirkeln

Exempel 6.3 Givet $v = 34^\circ$.

- Dess *komplementvinkel* är $90^\circ - v = 90^\circ - 34^\circ = 56^\circ$.
- Dess *supplementvinkel* är $180^\circ - v = 180^\circ - 34^\circ = 146^\circ$.

≡

Exempel 6.4 Givet att $\sin v = \frac{2}{3}$ för vinkeln v i andra kvadrant. Beräkna $\cos$, $\tan$, och $\cot$ för v .

Lösning: Sätt en hypotenusan $c = 3$ och motstående katet $b = 2$. Närliggande katet är då $\sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$.

$$\cos v = -\frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \tan v = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cot v = -\frac{\sqrt{5}}{2}, \quad (v \approx 138.2^\circ).$$

≡

Trigonometriska värden för vinkel och supplementvinkel

Vi ser i enhetscirkeln att $\sin(180^\circ - v) = \sin v$, $\cos(180^\circ - v) = -\cos v$.

Positiv och negativ vinkel

Positiv vinkel är vinkeln mellan positiva cos-axeln och visaren, vriden moturs från axeln.

Negativ vinkel är vinkeln mellan positiva cos-axeln och visaren, vriden medurs från axeln.

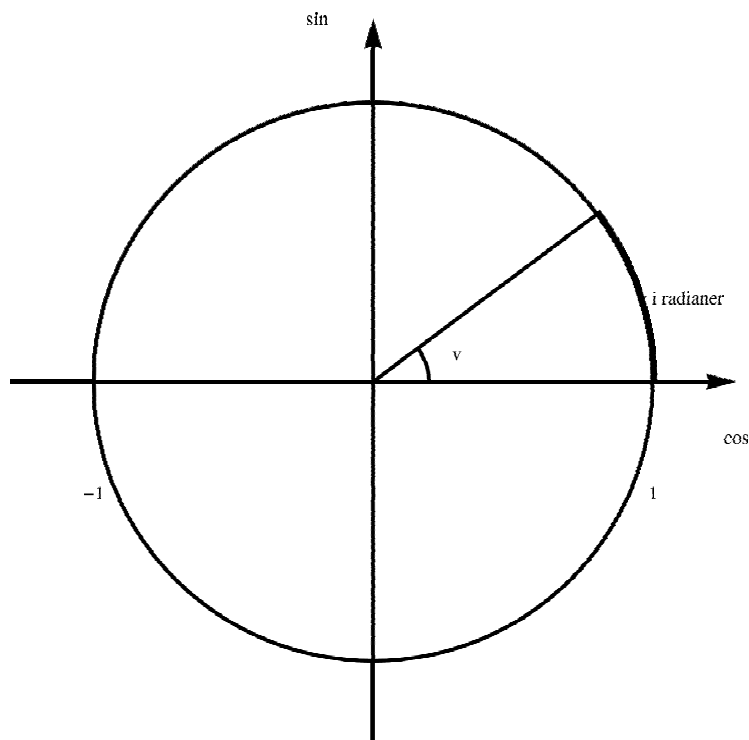
Trigonometriska värden för vinkel v och $-v$

Vi ser i enhetscirkeln att $\sin(-v) = -\sin v$ och $\cos(-v) = \cos v$.

Samband mellan grader och radianer

x i grader är $x \cdot \frac{\pi}{180}$ i radianer, ex.vis $30^\circ = 30^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{6}$. Vi kan göra en tabell.

x i grader	360°	180°	90°	45°	30°
x i radianer	2π	π	$\pi/2$	$\pi/4$	$\pi/6$



- Radianer är längden av cirkelbågen, med tecken, för motsvarande vinkel i grader i enhetscirkeln.
- Samband för supplementvinkel: Man ser att $\sin v = \sin(\pi - v)$ och $\cos(\pi - v) = -\cos v$. Vinkeln $\pi - v$ är trubbig i figuren. Cosinusvärdet är < 0 för trubbig vinkel medan sinusvärdet > 0 .
- M.h.a. enhetscirkeln ser vi att $\cos x$ och $\sin x$ har perioden $T = 2\pi$ eller $T = 360^\circ$. $\tan x$ och $\cot x$ har perioden $T = \pi$ eller $T = 180^\circ$.

Exempel 6.5 Lös ekvationen $\cos 2x = 1/2$ i grader och radianer.

Lösning:

$$2x = 60^\circ + n \cdot 360^\circ \text{ eller } 2x = -60^\circ + n \cdot 360^\circ \implies$$

$$x = 30^\circ + n \cdot 180^\circ \text{ eller } x = -30^\circ + n \cdot 180^\circ, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

I radianer blir

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$



Exempel 6.6 Lös ekvationen $1 - \tan(x/2 - \pi/3) = 0$.

Lösning:

$$\dots \Leftrightarrow \tan(x/2 - \pi/3) = 1 \Leftrightarrow x/2 - \pi/3 = \pi/4 + n\pi \Leftrightarrow x = n \cdot 2\pi + 7\pi/6, \quad n \in \mathbb{Z}.$$



Ekvationer av typ $\sin = \cos$

Exempel 6.7 Lös ekvationen $\cos(\pi/3 + 2x) = \sin x$.

Lösning: Förvandla $\sin$ till $\cos$ (eller vice versa).

Detta ger

$$\cos(\pi/3 + 2x) = \cos(\pi/2 - x) \Leftrightarrow \pi/3 + 2x = \pi/2 - x + 2n\pi \text{ eller } \pi/3 + 2x = -(\pi/2 - x) + 2n\pi,$$

som ger

$$x = \frac{1}{18}\pi(12n + 1) \text{ eller } x = \frac{1}{6}\pi(12n - 5), \quad n \text{ heltal.}$$



Additionsformler

M.h.a. en "dubbeltriangel" kan man härleda additionsformler för $\cos$, och $\sin$ och därefter för $\tan$. Bl.a. är

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

och

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

Ur den senare får man sinus för dubbla vinkeln genom att sätta $\beta = \alpha$. Ur additionsformeln

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

får man

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha = \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha.$$

Kommentarer

- För linjens ekvation $y = kx + m$ och α vinkeln mellan positiva x -axeln och linjen (räknad positiv vid vridning moturs.), gäller att $k = \tan \alpha$.
- Detta samband kan användas att beräkna strålgången i ett spegelteleskop eller mer allmänt, en reflekterad linjes riktningskoefficient.

Exempel 6.8 Bestäm det exakta värdet av $\cos 15^\circ \equiv \cos(\pi/12)$.

Lösning: Vi får från cosinus för dubbla vinkeln med $2\alpha = \pi/6$ att

$$\cos \alpha = \cos(\pi/12) = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{3}/2}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}}$$

men kan detta uttryck förenklas? Vi löser problemet på ett annat sätt:

$$\cos(\pi/12) = \cos(\pi/4 - \pi/6) = \cos(\pi/4) \cdot \cos(\pi/6) + \sin(\pi/4) \cdot \sin(\pi/6) = \dots$$

$$= \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{2} \cdot 1}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Dessa två uttryck är alltså lika! Visa det!

≡