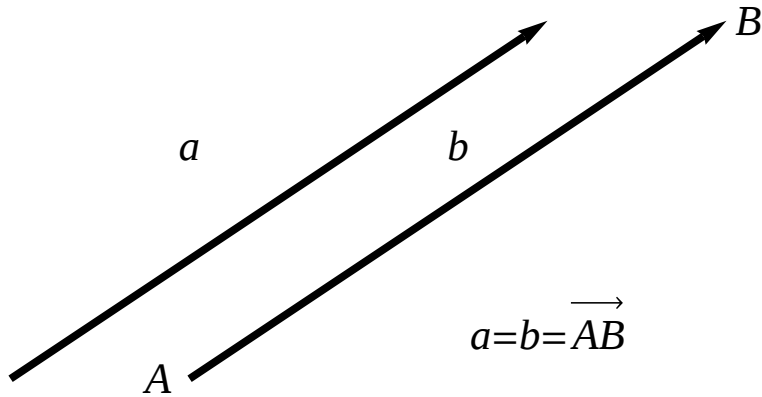


<< Calendar`

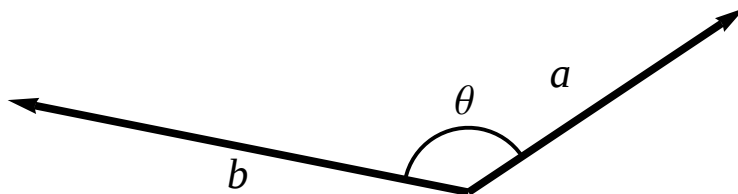
DayOfWeek[{2011, 09, 26}]

Monday

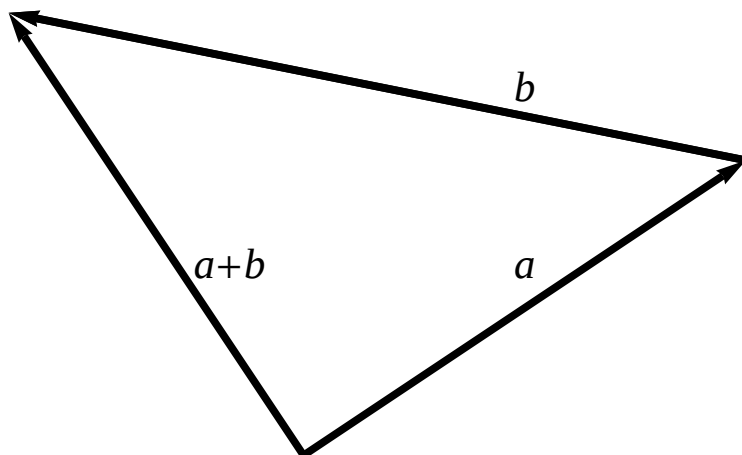
Kapitel 5, vektorer



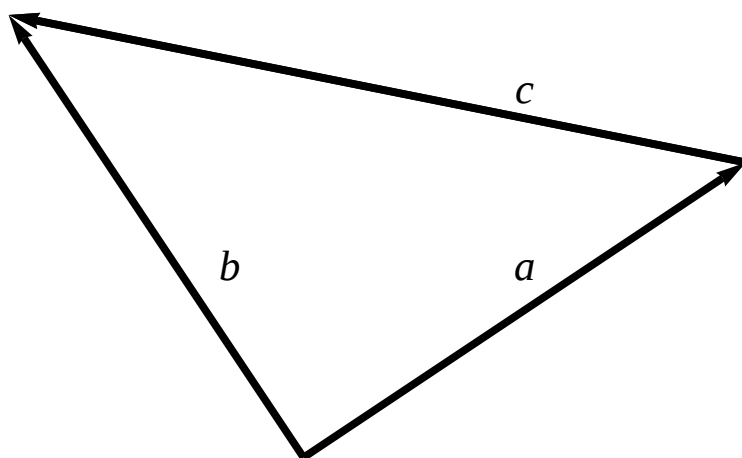
- Vektorerna a och b är lika långa och parallella och därmed lika: $a=b$.
En vektor kan parallellförflyttas och för blir densamma.
- För vektorn b är A startpunkt och B slutpunkt. Vi skriver $a=b=\overrightarrow{AB}$
- Vektorna $-a$ är samma vektor som a fast "motsatt" riktad.
Två "motsatt riktade" vektorer är antiparallella.
Mer allmänt är vektorn $k a$, en vektor parallell med a men med längd $|k||a|$, om $k>0$.
Kör $k<0$ är $k a$ och a antiparallella.
- Längd av vektor
- $|a|\geq 0$ är längden av vektorn a . Endast nollvektorn har längden 0.
- Vinkel mellan vektorer
- Genom att sammanföra två vektorers startpunkter får man ett vinkelben. Vinkeln θ är då vinkeln mellan vektorerna.



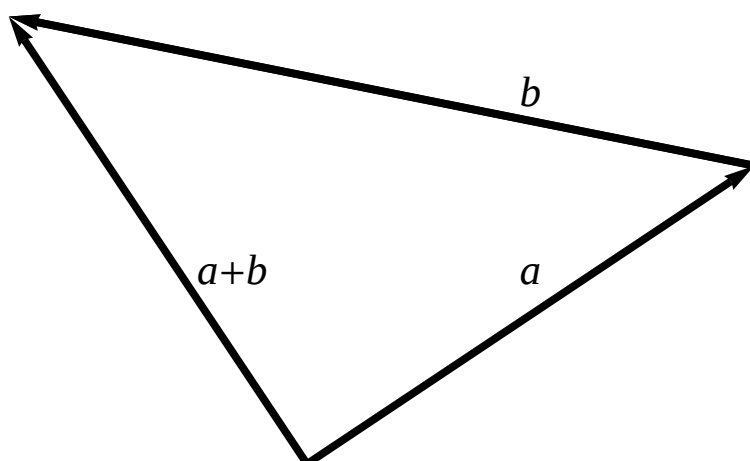
- Vinkeln $0 \leq \theta \leq 180^\circ$.
- Addition av vektorer. Den enes slutpunkt och den andras startpunkt sammanförs. Då erhålls vektorn $a+b$, som vektorn från den enes startpunkt och den andras slutpunkt.
 $a-b=a+(-b)$.



- Ex 5.1 Ge ett samband mellan följande vektorer.

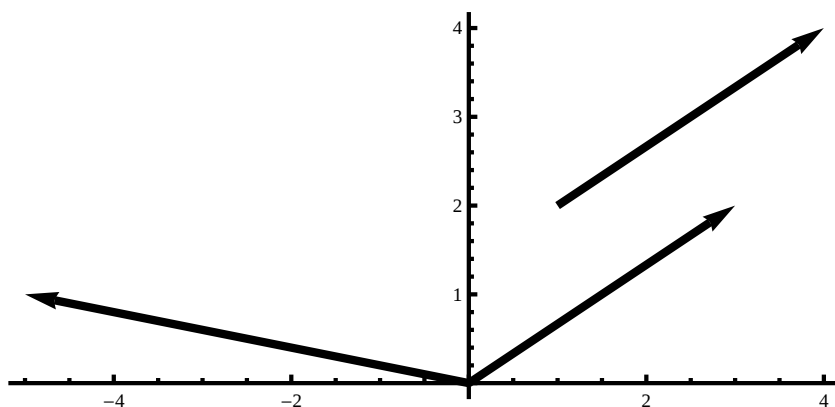


- Speciellt är $|a+b| \leq |a| + |b|$. (Triangelolikheten). Vad krävs för att få likhet?

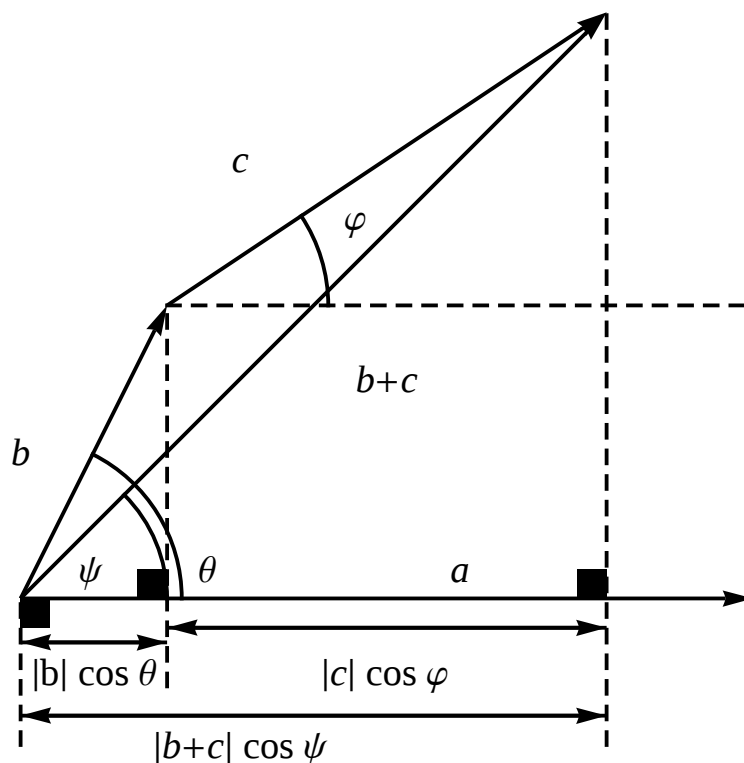


- Enhetsvektor e .

$$\{\sqrt{13}, \sqrt{26}, \{-2, 3\}, \{6, 4\}\}$$



- Två enhetsvektorer. Basvektor, Standardbasen i $\mathbb{R}^2$. ON-system
- Ex 5.3 Omskrivning av a och b uttryckta i standardbasen.
- 5.6 Skalär produkt, ett mått på två vektorer samarbete, projektion.
- 5.7 Distributiva lagen för skalär produkt



$$|b| \cos \theta + |c| \cos \phi = |b+c| \cos \psi$$

- Vi ser att $|b| \cos \theta + |c| \cos \phi = |b+c| \cos \psi$.
Genom att multiplicera med $|a|$ i båda led får man
 $|a||b| \cos \theta + |a||c| \cos \phi = |a||b+c| \cos \psi$, som betyder
 $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c)$.

- $|b| \cos \theta + |c| \cos \phi = |b+c| \cos \psi$
- Speciellt är $a \cdot b = 0 \iff a \perp b$ och $a \cdot a = |a|^2$.
- Ex 5.4 Givet

```
{absa, absb, v} := {2, 3, Pi / 4}
```

```
absa absb Cos[v]
```

```
{Null, Null, Null}
```

```
3 Sqrt[2]
```

■ 5.8-5.9 Vektor i koordinatsystem: Ortsvektor(-representation av vektor=komponentform)

- Ex 5.2 Vektorn a med startpunkt i $(1,2)$ och slutpunkt i $(4,4)$ kan ges en Ortsvektorpresentation. $a=(3,2)$. Vi kan räkna ut längden av a med P:s sats.

Vi inför vektorn $b=(-5,1)$. $a+b=(3,2)+(-5,1)=(-2,3)$. Speciellt är $|a+b| \leq |a|+|b|$. (Triangelolikheten)

$$a := \{3, 2\}$$

$$b := \{-5, 1\}$$

$$\{\sqrt{a \cdot a}, \sqrt{b \cdot b}, a + b, 2a\}$$

$$\{\sqrt{13}, \sqrt{26}, \{-2, 3\}, \{6, 4\}\}$$

- Ex 5.5 a) Beräkna skalärprodukten av a och b i exempel 5.2.

Lösning

b) Bestäm alla vektorer $c \perp a$.

■ Ortsvektor och punkt.

- $\overrightarrow{OP}$ och P motsvarar varandra.

För att bestämma vektorn med startpunkt i P och slutpunkt i Q , räknar vi med vektorer.

$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PQ}$. Nu är $\overrightarrow{OP}$ =punkten P , fast skriven med kommatecken mellan komponenterna,

ex.vis $P(1;3)$ $\overrightarrow{OP}=(1,3)$.

■ $\mathbb{R}^3$

- Högersystem, ONH-system. Orientering av x-, y- och z-axlarna.

- Ex 5.6 Vektorer på komponentform. Längd, summa och vinkel mellan vektorerna beräknas som för vektorer i $\mathbb{R}^2$.

$$\{a, b\} := \{\{1, 2, 1\}, \{3, 5, 8\}\};$$

$$\left\{a \cdot b, \sqrt{a \cdot a}, \sqrt{b \cdot b}, \frac{a \cdot b}{\sqrt{a \cdot a} \sqrt{b \cdot b}}\right\}$$

$$\left\{21, \sqrt{6}, 7\sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

- Komponent, sid 84 och koordinat sid 90.

Komponenterna för $\overrightarrow{OP}=(x,y,z)$ är de samma som koordinaterna för $P=(x;y;z)$.

- Definition av högersystem, se sidan 91.

■ 5.10 Vektoriell produkt (finns bara i $\mathbb{R}^3$.)

- (5.14) Beskrivning av ett plan. Planets ekvation I.

Vektorprodukt (Komponentfri definition).

$|a \times b| = |a||b|\sin \theta$ och $(a,b,a \times b)$ bildar ett högersystem (i den ordningen) och

$a \times b \perp a$ samt $a \times b \perp b$. Obs! Den vektoriella produkten $a \times b$ är en vektor!!

Speciellt följer det att $a \times a = 0$, nollvektorn. Bevis:

$|a \times a| = |a||a|\sin 0 = 0$. Och den enda vektor som har längden 0 är nollvektorn.

Vidare gäller att $(k a) \times b = k (a \times b)$.

Vektorprodukten är "anti-kommutativ" $a \times b = -b \times a$, men ej associativ.

s.p. är distributiv*).

$a \times (b+c) = a \times b + a \times c$, som är vänsterdistr. lagen. (Bevisas inte)

Specialfall:

$e_x \times e_y = e_z$, $e_y \times e_z = e_x$, $e_z \times e_x = e_y$, $e_x \times e_x = e_y \times e_y = e_z \times e_z = 0$, nollvektorn(!).

■ 5.11 Vektoriell produkt i komponentform

- Vi använder oss av att a och b kan skrivas m.h.a. standardbasen och distr. lagen.

Remove [a, b]

Cross [{a_x, a_y, a_z}, {b_x, b_y, b_z}]

{-a_z b_y + a_y b_z, a_z b_x - a_x b_z, -a_y b_x + a_x b_y}

- Ex 5.7 Vinkeln mellan vektorerna a och b kan fås med vektorprodukt (Lite mer invecklat).

Nu kan vi sinus för vinkeln θ : $\theta = 30^\circ$ eller $\theta = 150^\circ$?

$$\left\{ a, b, \text{Cross}[a, b], \frac{\sqrt{\text{Cross}[a, b] \cdot \text{Cross}[a, b]}}{\sqrt{a \cdot a \, b \cdot b}} \right\}$$

$$\left\{ \{1, 2, 1\}, \{3, 5, 8\}, \{11, -5, -1\}, \frac{1}{2} \right\}$$

- Vad gäller för a och b för att $a \times b = 0$?

- Associativa lagen gäller inte.

- Bevis: Deträcker med ett motexempel.

$e_x := \{1, 0, 0\}$

$e_y := \{0, 1, 0\}$

$e_z = \text{Cross}[e_x, e_y]$

{Cross[Cross[e_x, e_y], e_x], Cross[e_x, Cross[e_y, e_x]]}

{Cross[Cross[e_x, e_y], e_y], Cross[e_x, Cross[e_y, e_y]]}

{0, 0, 1}

{{0, 1, 0}, {0, 1, 0}}

{{-1, 0, 0}, {0, 0, 0}}

- E 5.8 Förenkla $a \times (b+a) + (b-a) \times a$.

$a := \{a_x, a_y, a_z\}$

$b := \{b_x, b_y, b_z\}$

Cross[a, b + a] + Cross[b - a, a]

{0, 0, 0}

- Ex 5.9 a) Givet punkterna... Beräkna arean av triangeln som har hörn i dessa.

```

{P, Q, R} := {{1, 2, 0}, {5, 3, 0}, {4, 1, 0}}
{PQ, PR} = {Q - P, R - Q}
Cross[PQ, PR]
{Null, Null, Null}
{{4, 1, 0}, {-1, -2, 0}}
{0, 0, -7}

```

- Ex 5.9b) Beräkna vektorprodukten av u och v.

```

{u, v} := {{1, 7, 2}, {-1, -4, 1}};
{u, v, Cross[u, v] / 3}
{{1, 7, 2}, {-1, -4, 1}, {5, -1, 1}}

```

- Ex 5.10 Givet fyra punkter i $\mathbb{R}^3$, P, Q, R och S. Dessa är hörnen i en tetraeder. Beräkna tetraederns volym V.

```

{P, Q, R, S} := {{1, -2, 2}, {2, 1, 3}, {0, 4, 1}, {2, -2, 0}};
a = Q - P
b = R - P
c = S - P
{Cross[a, b], Cross[a, b] . c / 6}
{1, 3, 1}
{-1, 6, -1}
{1, 0, -2}
{{-9, 0, 9}, -9/2}
Cross[a, b] . c / 6
-9/2

```

- Trippel skalärprodukt av tre vektorer $(a \times b) \cdot c$, sid 97

- På komponentform.

```

a := {ax, ay, az}
b := {bx, by, bz}
c := {cx, cy, cz}

```

- Skalär produkt på komponentform har vi beräknat tidigare.
Vi gör det igen men med vektorerna uttryckta m.h.a. ex, ey, ez. Ex.vis blir $a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.
- Trippel skalärprodukt av a, b och c. Vi börjar med $a \times b$. Vi behåller ex, ey och ez.

```

Cross[a, b]

```

$$(-az by + ay bz) ex + (az bx - ax bz) ey + (-ay bx + ax by) ez$$

$$\{-az by + ay bz, az bx - ax bz, -ay bx + ax by\}$$

- Till sist skalär produkt med c . Vi ser att skillnaden mellan $a \times b$ och $(a \times b) \cdot c$ utgörs av att ex ersätts av cx , ey av cy och ez av cz . Alltså kan trippel skalärprodukten uttryckas *också* med en determinant, där övre raden $[ex ey ez]$ byts mot $[cx cy cz]$. Alltså

$$(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} cx & cy & cz \\ ax & ay & az \\ bx & by & bz \end{vmatrix}. \text{ Radbyte av två intilliggande rader betyder teckenbyte i en determinant.}$$

■ 5.12-5.13 Räta linjens ekvation.

- Ex 5.11 a) Linjens ekvation i $\mathbb{R}^3$. Vad vill man beskriva? Jo, alla punkter som ligger på en given linje. Hjälpmiddel: Ortsvektorer! Linjen i $\mathbb{R}^3$ och högre dimensioner ges på parameterform.

$$\{P, Q\} := \{\{1, 0, 3\}, \{2, 7, 5\}\};$$

$$u = Q - P$$

$$u s + P$$

$$\{1, 7, 2\}$$

$$\{1 + s, 7s, 3 + 2s\}$$

- Ex 5.11 b) Givet en linje till.

Skär linjerna varandra? Bestäm i så fall skärningspunkten.

$$\{P1, Q1\} := \{\{1, 6, 9\}, \{0, 2, 10\}\};$$

$$v = Q1 - P1$$

$$\{-1, -4, 1\}$$

$$\text{Solve}[u s + P = v t + P1, \{s, t\}]$$

$$\{\{s \rightarrow 2, t \rightarrow -2\}\}$$

$$\{2u + a, (-2)v + c\}$$

$$\{\{3, 14, 7\}, \{3, 14, 7\}\}$$

- Ex 5.11 c) Betäm vinkeln mellan linjerna. (Detta görs p.s.s. även om linjerna inte skär varandra.)

$$\left\{ \frac{u \cdot v}{\sqrt{u \cdot u v \cdot v}}, \text{ArcCos}\left[\frac{u \cdot v}{\sqrt{u \cdot u v \cdot v}}\right] 180 / \text{Pi}, \left(\text{Pi} - \text{ArcCos}\left[\frac{u \cdot v}{\sqrt{u \cdot u v \cdot v}}\right]\right) 180 / \text{Pi} \right\}$$

$$\left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}, 150, 30 \right\}$$

- Ex 5.11 d) Givet punkten S... Bestäm avståndet mellan linjen i a) och punkten S.

$$\mathbf{S} := \{-2, 2, 3\}$$

$$\mathbf{ps} = \mathbf{S} - \mathbf{P}$$

$$\left\{ \mathbf{u}, \mathbf{v}, \text{Cross}[\mathbf{ps}, \mathbf{u}], \frac{\sqrt{\text{Cross}[\mathbf{ps}, \mathbf{u}] \cdot \text{Cross}[\mathbf{ps}, \mathbf{u}]}}{\sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}}, \frac{\sqrt{\text{Cross}[\mathbf{ps}, \mathbf{u}] \cdot \text{Cross}[\mathbf{ps}, \mathbf{u}]}}{\sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}} \right\}$$

$$\{-3, 4, 1\}$$

$$\left\{ \{1, 7, 2\}, \{-1, -4, 1\}, \{1, 7, -25\}, 15\sqrt{3}, 3\sqrt{6}, \frac{5}{\sqrt{2}} \right\}$$

- Ex 5.11 d) Givet linjen i 5.11 a). Bestäm de punkter som ligger på avståndet $6\sqrt{6}$ enheter på linjen från punkten P.

Kommentar ang. normerad riktningsvektor, d.v.s. riktningsvektor som enhetsvektor.

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}) \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}) // \text{Expand}$$

$$54 t^2$$

$$\text{Solve}[54 t^2 = 216, t]$$

$$\{\{t \rightarrow -2\}, \{t \rightarrow 2\}\}$$

$$\mathbf{l}[t_]:= \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{l}[-2]$$

$$\mathbf{l}[2]$$

$$\{-1, -14, -1\}$$

$$\{3, 14, 7\}$$

- **5.14 Planets ekvation borde bero på två parametrar s och t eftersom linjens ekvation beror på en parameter t . Obs! En parameter för varje fri variabel!
Vi skall ha en annan utgångspunkt.**
- Vi använder oss av vektorer för att beskriva punktmängden som utgör planet.
- Ett plan definieras av en punkt och en normalvektor $\neq 0$, eller alternativt av tre punkter, som *inte* ligger på linje.
Vi skall beskriva alla punkter $S=(x;y;z)$ i ett givet plan. medelst en ekvation, planets ekvation.
- Vi kan utgå från en *normalvektor* n , till planet och en punkt i planet eller tre punkter i planet, som ej ligger på linje.
- Med tre punkter P, Q och R bildar vi två vektorer $\overrightarrow{PQ}$ och $\overrightarrow{PR}$.
- Nu är $\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PQ}$ och $\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{PR}$. Därefter bildas en normalvektor *m.h.a.* vektorprodukt $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = n$. Till sist ser vi att alla punkter $S = (x; y; z)$ i planet uppfyller $n \cdot ((x, y, z) - \overrightarrow{OP}) = 0$. eller $n \cdot (\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP})$, där $R = (x; y; z)$. +
- Ex 5.12 a) Bestäm planets ekvation som går genom punkterna nedan.

$$\{P, Q, R\} := \{\{1, -2, 2\}, \{2, 2, 3\}, \{2, 1, 3\}\}$$

$$pq = Q - P$$

$$pr = R - P$$

$$n1 = \text{Cross}[pq, pr]$$

$$\{Null, Null, Null\}$$

$$\{1, 4, 1\}$$

$$\{1, 3, 1\}$$

$$\{1, 0, -1\}$$
- Planet Π är givet.
Planets ekvation. Alla punkter $S=(x;y;z)$ som uppfyller att $S-P \perp n$ ligger i planet och omvänt.
Villkoret " $\perp$ " är ekvivalent med att skalärprodukten $=0$, d.v.s. planets ekvation är $n1 \cdot (\{x,y,z\} - P) = 0$

$$n1 \cdot (\{x, y, z\} - P)$$

$$n1 \cdot (\{x, y, z\} - Q)$$

$$n1 \cdot (\{x, y, z\} - R)$$

$$1 + x - z$$

$$1 + x - z$$

$$1 + x - z == 0$$
- Kommentar: Planets ekvation kan skrivas med parametrar. Sätt, för de fria variablerna, ex.vis $y=s$ och $z=t$. Planet består då av punkterna $(x;y;z)=(t-1,s,t)$, $(s;t) \in \mathbb{R}^2$. Generellt sätt, får vi en yta i $\mathbb{R}^3$, p.g.a. två parametrar eller två fria variabler.

$$S := \{-2, 2, 3\}$$
- Ex 5.12 c) Bestäm avståndet mellan planet Π och punkten $S=(-2;2;3)$.
Lösning: Planets ekvation kan skrivas $Ax+By+Cz+D=0$, där $n=(A,B,C)$.
 $n=(1,0,-1)$. Vi får att

$$d = |\vec{PS}| \cos \theta, \text{ samt } \vec{PS} \cdot \vec{n} = |\vec{PS}| |\vec{n}| \cos \theta, \text{ så att}$$

$$d = \frac{|\vec{PS} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}. \text{ Nämnaren är } |\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Vi skriver om täljaren:

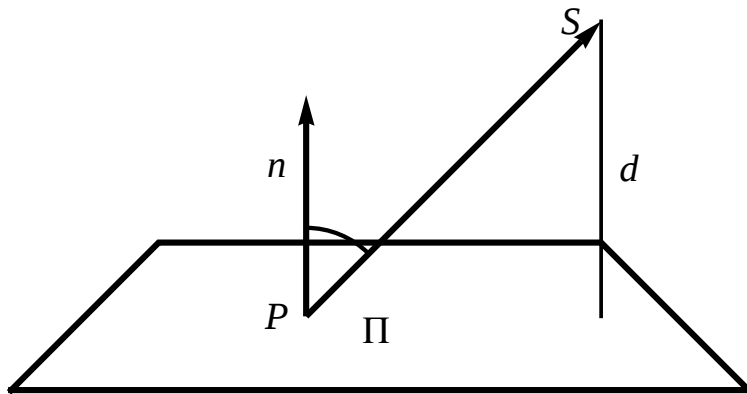
$$\vec{PS} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot (\vec{OS} - \vec{OP}) = \vec{n} \cdot (x_1, y_1, z_1) - \vec{n} \cdot (x, y, z) = (A, B, C) \cdot (x_1, y_1, z_1) - (A, B, C) \cdot (x, y, z) =$$

$$(A x_1 + B y_1 + C z_1) - (A x + B y + C z) = A x_1 + B y_1 + C z_1 + D.$$

$$d = \frac{|A x_1 + B y_1 + C z_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)|}{|\vec{n}|}.$$

In[701]:= **th;**

Out[700]=



Remove [d]

$$d[x_, y_, z_] := \frac{\vec{n1} \cdot \{x, y, z\} + 1}{\sqrt{\vec{n1} \cdot \vec{n1}}}$$

d[-2, 2, 3]

$$-2\sqrt{2}$$