Linjär algebra

Innehåll

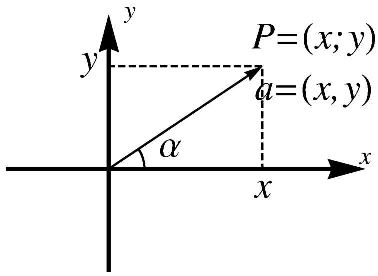
2

Grundläggande algebra

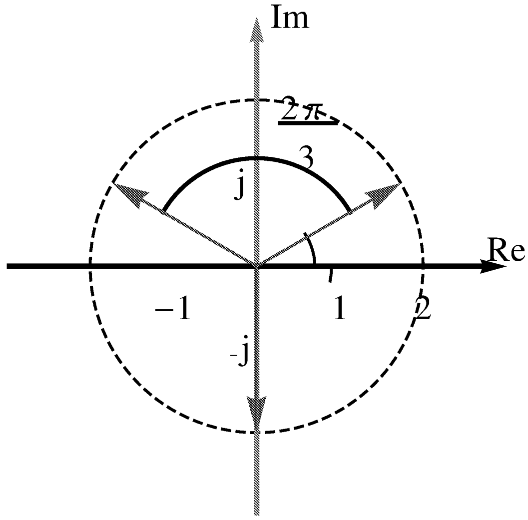
7

Komplexa tal

7.1 Definition och jämförelse med $\mathbb{R}^2$



TALPLANET $\mathbb{R}^2$



DE KOMPLEXA TALPLANET $\mathbb{C}$

7.1.1 Likheter mellan $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{C}$

I båda talplanen ges en ortsvsektor/punkt av två koordinater (x och y). Vektorerna har samma längd $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{x^2+y^2}$ respektive $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$. Båda dessa bildar samma vinkel med den positiva $x-$axeln respektive med den positiva realaxeln /betecknad med Re .). Vinkeln α i figurerna räknas positiv från dessa axlar vid vridning moturs. I det komplexa talplanet kallas denna vinkel "argument" som skrivs "arg": $\arg z = \alpha$. I $\mathbb{R}^2$ skrivs talet $P = (x;y)$ och motsvarande ortsvektor $\boldsymbol{a} = (x,y)$.

Exempel 7.1

- I $\mathbb{C}$ skrivs talet $z = x + jy$, där j (eller i) kallas den imaginära enheten.
- I figuren t.h. ovan, är $z = 3 + j2$ och $|z| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$. $\arg z = \alpha = \arctan(2/3)$.
- $\operatorname{Re} z = 3$, $\operatorname{Im} z = 2$.
- Ett komplext tal $z = x + 0 \cdot j = x$, där x är reellt, kallas *rent reellt*.
- Ett komplext tal $z = 0 + y \cdot j = yj$, där y är reellt, kallas *rent imaginärt*.
- För x, y, a, b reella och $x + jy = a + jb$, så är $x = a$ och $y = b$.
- För $z = x + jy$, så är $\bar{z} = x - jy$ och kalla komplexkonjugatet till z.
- Det är klart att $\bar{\bar{z}} = z$.
- Talen $r = \sqrt{13}$ och $\alpha = \arctan(2/3)$ är de *polära koordinaterna* för $z = 3 + 2j$.
- P.s.s. är $w = 5 - j$ med $|w| = \sqrt{26}$ och $\beta = \arctan(-1/5)$.

Vi återkommer till dessa speciella z och w

■

7.1.2 Räknelagar för komplexa tal

Exempel 7.2 Med samma $w = 5 - j$ som i exempel 7.1 så är

$$2z = 2(3 + 2j) = 6 + 4j, \quad z + w = 3 + 2j + 5 - j = 8 + j$$

P.s.s. utför man en substraktion mellan två komplexa tal. För multiplikation

$$z \cdot w = 15 + 7j - 2j^2.$$

■

behöver vi en definition av j^2 och den är

$$j^2 = -1 \tag{7.1}$$

Som konsekvens får vi att

$$j = j,\ j^2 - 1,\ j^3 = -j,\ j^4 = 1,\ j^5 = j \text{ o.s.v.. Vidare är } \frac{1}{j} = \frac{1}{j} \cdot \frac{-j}{-j} = \frac{-j}{1} = -j.$$

För division $\dfrac{z}{w}$ behöver vi en definition

Definition 4 *Ett komplext tal skrivet på formen $x + jy$, där x och y är reella, kallas kartesisk form.*

Och på det en sats.

Teorem 1 *Varje komplext tal kan skrivas på denna form.*

Vi börjar med att skriva $\frac{1}{w}$ på denna form. Vi behöver alltså göra oss av med $j-$termen i nämnaren. Vi förlänger då med konjugatet $\overline{w}$.

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\overline{w}}{\overline{w}} = \frac{5+j}{(5-j)(5+j)} = \frac{5+j}{5^2-j^2} = \frac{5+j}{26}.$$

P.s.s. är nu

$$\frac{z}{w} = \frac{3+2j}{1} \cdot \frac{5+j}{26} = \frac{13+13j}{26} = \frac{1+j}{2}.$$

Vi ser också att $w \cdot \overline{w} = 26 = |w|^2$. Detta är typiskt, d.v.s. för varje komplext tal z är

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2.$$

7.2 Några identiteter samt förenklingar

Exempel 7.3 Förenkla...

$$\frac{z^2+1}{z+j} = \frac{z^2-j^2}{z+j} = \frac{(z-j)(z+j)}{z+j} = z-j.$$

■

Exempel 7.4 Visa att för varje komplext tal $z = x + jy$, så är $z + \overline{z}$ reellt.

Lösning:

$$z+\overline{z} = x+jy+(x-jy) = 2x = 2\mathrm{Re}\, z \Leftrightarrow x = \mathrm{Re}\, z = \frac{z+\overline{z}}{2}.$$

P.s.s. är

$$z-\overline{z} = x+jy-(x-jy) = 2jy \Leftrightarrow y = \mathrm{Im}\, z = \frac{z-\overline{z}}{2j}.$$

■

7.3 Ekvationer

7.3.1 Förstagradsekvationer m.m.

Exempel 7.5 Lös ekvationen $j\overline{z} + 2z = 2 + j$.

Lösning: Sätt $z = x + jy$ med x och y reella tal. Vi får då

$$2x + jx + y + 2jy = 2 + j \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}: & 2x+y=2 \\ \mathrm{Im}: & x+2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1, \quad y = 0, \text{ d.v.s. } z = 1.$$

■

Exempel 7.6 Lös ekvationen

$$\frac{2z+j}{z-(1+j)} = 3-j.$$

Lösning:

$$\Leftrightarrow 2z+j=(3-i)z-(4+2j)\Leftrightarrow(-1+j)z=-4-3j\Leftrightarrow z=\frac{4+3j}{1-j}\cdot\frac{1+j}{1+j}=$$

$$z=\frac{1+7j}{2}.$$

■

7.3.2 Andragradsekvationer

Exempel 7.7 Lös ekvationen

$$z^2+2z=-5.$$

Lösning:

$$\ldots\Leftrightarrow z^2+2z+5=0\Leftrightarrow z=-1\pm\sqrt{1-5}=-1\pm 2j.$$

Svar: $z=1\pm 2j$.
Observera att vi dessutom får faktoruppdelningen av $z^2+2z+5=(z+1-2j)(z+1+2j)$, och att *rötterna är komplexkonjugerade.*

■

Så långt kan vi lösa en andragradsekvation med $p-q$ formeln.

Exempel 7.8 Givet funktionen $f(z)=z^2-(2+4j)z-(3-2j)$.

(a) Kvadratkomplettera $f(z)$.

(b) Lös ekvationen $f(z)=0$, d.v.s. bestäm funktionens nollställen.

(c) Skriv $f(z)$, som en produkt av två polynom av grad 1.

Lösning:

(a) Kvadratkomplettering:

$$f(z)=z^2-2(1+2j)z+(1+2j)^2=(z-(1+2j))^2-2j.$$

(b) Ekvationen $f(z)=0$ kan nu skrivas

$$f(z)=(z-(1+2j))^2-2j\Leftrightarrow(z-(1+2j))^2=2j.$$

Vi skall nu skriva HL $2j$ som en jämn kvadrat $(a+jb)^2=2j$ som ger

$$\begin{cases}\text{Re}: & a^2-b^2=0\\ \text{Im}: & 2ab=2\\ \text{abs}: & a^2+b^2=|2j|=2\end{cases}\Leftrightarrow a=b=1 \text{ eller } a=b=-1.$$

Detta ger

$$(z-(1+2j))^2=(1+j)^2\Leftrightarrow z-(1+2j)=\pm(1+j)\Leftrightarrow z=1+2j\pm(1+j)\Leftrightarrow\begin{cases}z&=2+3j\\ &\text{eller}\\ z&=j\end{cases}$$

(c) Faktorsatsen ger då att

$$f(z) = (z-2-3j)(z-j),$$

d.v.s. som en produkt av två polynom av grad 1.

■

7.4 Polynom med reella koefficienter

Exempel 7.9 Polynomet $f(z) = z^3 + 3z^2 + 4z + 12$ är givet. Det har ett rent imaginärt nollställe.

(a) Lös ekvationen $f(z) = 0$.

(b) Faktoruppdela $f(z)$ i reella polynom av så låg grad som möjligt.

Lösning:

(a) Polynomet har enbart reella koefficienter, $1, 3, 4$ och 12. Ekvationen $f(z) = 0$ har en rot $z_1 = jb$, där b är reellt. I exempel 7.7 har vi komplexkonjugerade rötter till ett polynom med reella koefficienter. Detta är typiskt. Därmed har $f(z) = 0$ roten $z_2 = -jb$ och därmed är $(z-jb)(z-(-jb)) = z^2 + b^2$ en faktor till $f(z)$. Det finns nu två metoder att bestämma b. Den ena är att sätta in $z = jb$ i ekvationen $f(z) = 0$. Det ger

$$f(jb) = -jb^3 - 3b^2 + 4jb + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}: & -3b^2 + 12 = 0 \\ \mathrm{Im}: & -b^3 + 4b = 0 \end{cases}$$

Dessa ekvationer har rötterna $b = \pm 2$. Vi kan välja $b = +2 = 2$. En faktor är alltså $z^2 + 4$, så att

$$f(z) = z^3 + 3z^2 + 4z + 12 = (z^2+4)(z+3)\,.$$

Rötterna är alltså $z = \pm 2j$ och $z = -3$.

(b) Faktoruppdelningen är

$$f(z) = (z+3)(z^2+4)$$

i reella polynom av så låg grad som möjligt.

Alternativ metod/lösning av exemplet, är att se att just $z^2 + b^2$ är en reell faktor i $f(z)$. Vi sätter den andra faktorn till $z + c$. Då kan vi skriva

$$f(z) = z^3 + 3z^2 + 4z + 12 = (z^2 + b^2)(z+c) = z^3 + cz^2 + b^2 z + b^2 c\,.$$

Då måste vi ha att

$$\begin{cases} z^3: & 1 = 1 \\ z^2: & 3 = c \\ z^1: & 4 = b^2 \\ z^0: & 12 = b^2 c \end{cases} \Leftrightarrow c = 3 \text{ och } b = \pm 2$$

med samma fortsättning.

■

7.5 Polär form

M.h.a. de polära koordinaterna för $z = 3 + 2j$, r och α, kan $z = 3 + 2j$ uttryckas m.h.a. trigonometri. Vi använder nedre figuren på sidan 47 och ser att

$$\operatorname{Re} z = x = 3 = r\cos\alpha \text{ och } \operatorname{Im} z = y = 2 = r\sin\alpha\,.$$

Alltså är

$$z = r(\cos\alpha + j\sin\alpha)\,.$$

P.s.s. kan man skriva om $w = 5 - j$ som (Se exempel 7.1)

$$w = p(\cos\beta + j\sin\beta)\,.$$

Dessa skrivsätt använder vi nu för multiplikation och division.

$$\begin{aligned} z \cdot w &= r\,p(\cos\alpha + j\sin\alpha)(\cos\beta + j\sin\beta) = \\ &= r\,p(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + j(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta))\,. \end{aligned}$$

där vi använt oss av additionsformler för sinus och cosinus. Detta motiverar införandet av postensformen

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha\,. \tag{7.2}$$

Observera att då är

$$e^{j\alpha} \cdot e^{j\beta} = e^{j(\alpha+\beta)}\,.$$

Exempel 7.10 Vi beräknar vinkeln θ mellan z och w i figuren.

Lösning: Vi har att $\alpha - \beta = \theta$. Nu är

$$\frac{z}{w} = \frac{re^{j\alpha}}{pe^{j\beta}} = \frac{r}{p} \cdot e^{j(\alpha-\beta)} = \frac{r}{p} \cdot e^{j\theta}\,.$$

Nu är

$$\frac{z}{w} = \frac{1+j}{2} \text{ och därmed } \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

$$\theta = \arg\frac{z}{w} = \arctan(1/1) = \frac{\pi}{4} = 45^\circ\,.$$

Alltså är vinkeln $\theta = \dfrac{\pi}{4} = 45^\circ$.

■

Kommentarer

- Vi får också en regel för $|z \cdot w|$. Om vi tar

$$|z \cdot w| = |rp \cdot (\cos(\alpha + +beta) + j\sin(\alpha + \beta))| = \sqrt{r^2p^2 \cdot (\cos^2(\alpha + +beta) + \sin^2(\alpha + \beta))} = rp = |z| \cdot |w|\,.$$

  Alltså är $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$. P.s.s. kan man visa att $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$.

7.5.1 De Moivres och Eulers formler

M.h.a. potenslagar och (7.2) får vi

$$(\cos\alpha + j\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + j\sin(n\alpha)\,, n \in \mathbb{Z}\,, \qquad (7.3)$$

och

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \text{ samt } \sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}\,. \qquad (7.4)$$

7.6 Binom och binomiska ekvationer

Ett binom är ett polynom med bara två termer. Vi skall studera binom av formen $z^n = w$, där $n = 1, 2, \ldots$.

Exempel 7.11 Lös den *binomiska* ekvationen $z^2 = 2j$.

Lösning: Vi skriver om

$$2j = 2 \cdot e^{j\cdot\pi/2 + j2\pi\cdot n}, \quad n = -1, 0, 1, \ldots \text{ och } z = re^{j\theta +}$$

Detta är ekvivalent med att

$$\begin{cases} 2 & = r^2 \\ \pi/2 + 2\pi n & = 2\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} & = r \\ \pi/4 + \pi n & = \theta \end{cases}.$$

Genom insättning av heltal m, ser vi att det räcker med att sätta in ex.vis $n = 0, 1$, som ger

$$z = \sqrt{2} \cdot e^{j\pi/4} = 1 + j \text{ eller } z = \sqrt{2} \cdot e^{5j\pi/4} = -1 - j\,.$$

■

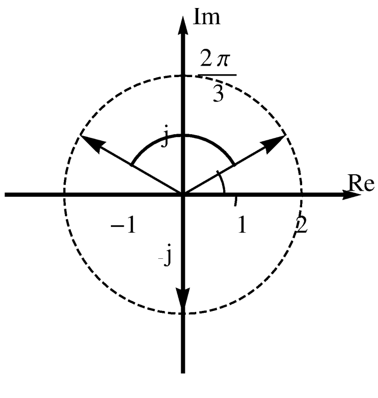
Exempel 7.12 Lös den binomiska ekvationen $z^3 = 8j$.

Lösning:

$$z^3 = r^3 e^{3j\theta} = 8 \cdot e^{j\pi/2 + j2\pi n}, \quad n \text{ heltal} \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 & = 8 \\ 3\theta & = \pi/2 + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r & = 2 \\ \theta & = \pi/6 + 2\pi n/3 \end{cases}.$$

Insättning av tre konsekutiva $n-$värden, ex.vis $n = -1, 0, 1$ ger 3 rötter

$$z_1 = -2j, \quad z_2 = \sqrt{3} + j, \quad z_3 = -\sqrt{3} + j\,.$$



DE TRE LÖSNINGARNA UTRITADE I DE KOMPLEXA TALPLANET SOM VEKTORER. VINKELN MELLAN TVÅ AV DESSA VEKTORER ÄR ETT TREDEJDELS VARV, D.V.S. $2\pi/3$.

■

Kommentarer

- I föregående exemepel får vi alltså tre rötter, lika många som graden på polynomet (binomet) $z^3 - 8j =: f(z)$. Detta är typiskt.
- Binomet $f(z)$ går att faktoruppdela m.h.a. rötterna (binomets nollställen)

  $$f(z) = z^3 - 8j = (z+2j)(z-(\sqrt{3}+j))(z-(-\sqrt{3}+j)) = (z+2j)(z-\sqrt{3}-j)(z+\sqrt{3}-j)\,.$$

- Observera att rötterna *inte* är komplexkonjugerade.