

LINJÄR ALGEBRA

Innehåll

1	<i>Linjärt ekvationssystem (ES)</i>	5
2	Grundläggande algebra	13
3	Matrisalgebra	15
3.1	Addition av matriser	15
3.2	Multiplikation mellan matriser	17
3.3	Enhetsmatris	20
3.4	Invers matris	21
3.4.1	Nollmatris och homogent ES	26
4	Determinant	29
4.0.2	Determinanten av en enhetsmatris	29
4.0.3	Radoperationer i en determinant	31
5	Vektorer	33
5.1	Geometrisk vektor	33
5.1.1	Längd av vektor	33
5.1.2	Vinkel mellan två vektorer	34
5.1.3	Addition av vektorer	34
5.1.4	Skalär produkt	35
5.1.5	Vektorprodukt	36
5.2	Vektor i koordinatsystem	37
5.2.1	Enhetsvektor	39
5.2.2	Vektorprodukt i komponentform	39
5.2.3	Några tillämpningar	41
5.2.4	Linje i $\mathbb{R}^n$	41
5.2.5	Trippel skalär produkt	44
6	Minsta kvadratmetoden	43
7	Komplexa tal	47
7.1	Definition och jämförelse med $\mathbb{R}^2$	47
7.1.1	Likheter mellan $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{C}$	47
7.1.2	Räknelagar för komplexa tal	48
7.2	Några identiteter samt förenklingar	49
7.3	Ekvationer	49
7.3.1	Förstgradsekvationer m.m.	49
7.3.2	Andragradsekvationer	50
7.4	Polynom med reella koefficienter	51
7.5	Polär form	52
7.5.1	De Moivres och Eulers formler	53
7.6	Binom och binomiska ekvationer	53

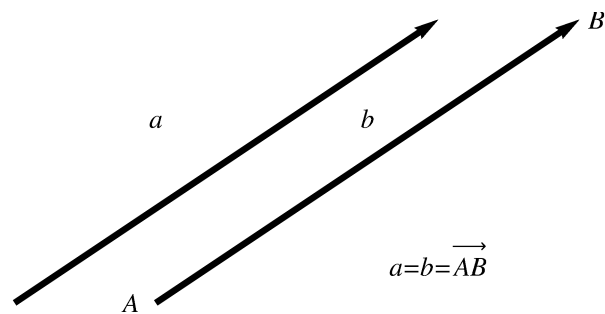
2

Grundläggande algebra

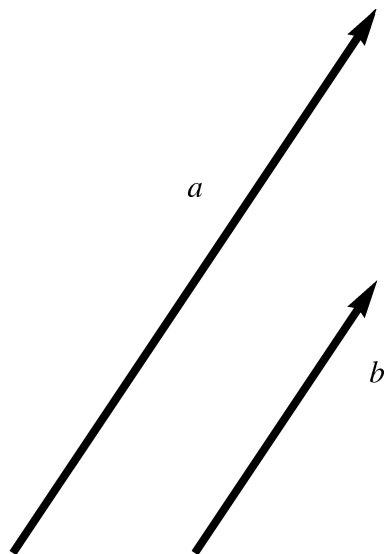
5

Vektorer

5.1 Geometrisk vektor



TVÅ VEKTORER SOM ÄR LIKA LÅNGA OCH PARALLELLA ÄR LIKA.



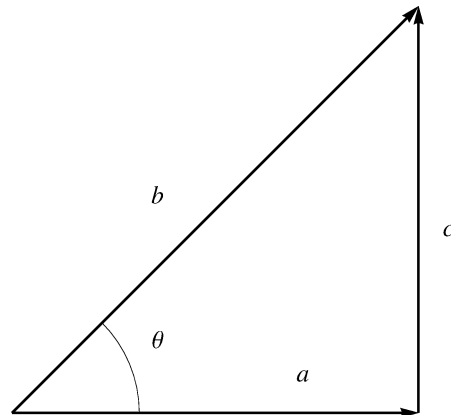
VEKTORERNA $\mathbf{a}$ OCH $\mathbf{b}$ ÄR PARALLELLA: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.
VI SER ATT $2\mathbf{b} = \mathbf{a}$.

5.1.1 Längd av vektor

Längden av en vektor $\mathbf{a}$, skrivs $|\mathbf{a}|$ och är ett reellt tal ≥ 0 .

5.1.2 Vinkel mellan två vektorer

Exempel 5.1

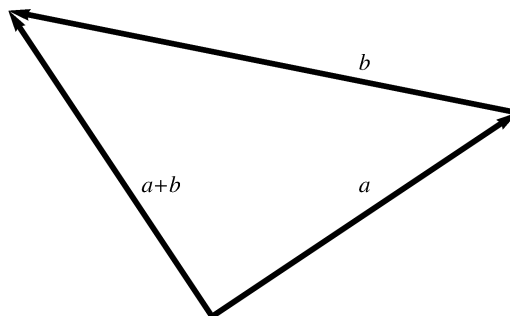


Vi kan räkna ut vinkeln θ mellan vektorer $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ m.h.a. vanlig trigonometri, om vi känner vektorernas längder. Vinkeln mellan vektorerna $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ kan vi få genom att införa $\mathbf{c}$ och se dessa som sidor i en triangel med längder $|\mathbf{a}| = a = \sqrt{5}$, $|\mathbf{b}| = b = \sqrt{10}$ och $c = |\mathbf{c}| = \sqrt{5}$. Cosinussatsen ger då att

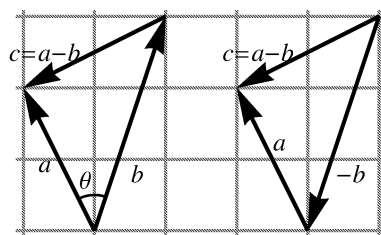
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{5 + 10 - 5}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \theta = 45^\circ.$$

■

5.1.3 Addition av vektorer

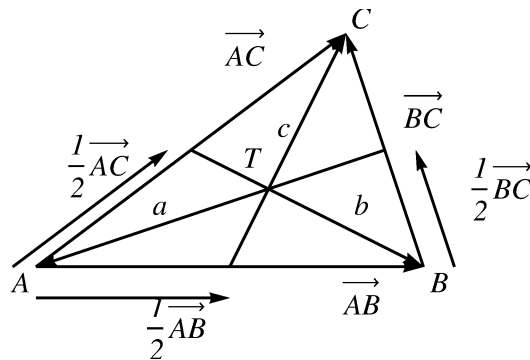


Vektoradditionen är kommutativ.



Speciellt är $-\mathbf{b}$ samma vektor som $\mathbf{b}$ men motsatt riktad; De är antiparallella med varandra. $\mathbf{a} - \mathbf{b} := \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$. Speciellt är $\mathbf{a} - \mathbf{a} = \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, nollvektorn.

Exempel 5.2 (Medianer i en triangel)



Vi visar nu att de tre medianerna skär varandra i en punkt T .

$$\overrightarrow{AT} \{\text{längs } \mathbf{a}\} =$$

■

5.1.4 Skalär produkt

Uttrycket

$$|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \theta =: \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (5.1)$$

kallas *skalär produkt*. Det är ett mått på två vektorers samverkan. Det är ett reellt tal (en skalär), inte en ny vektor.

Projektion

Med skalär produkt kan vi uttrycka projektionen av vektorn $\mathbf{b}$ på vektorn $\mathbf{a}$, som

$$|\mathbf{b}| \cos \theta = \frac{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}.$$

Exempel 5.3 Är det möjligt att $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 5$ och $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -3$, och vad blir vinkeln mellan vektorerna i så fall?

Lösning: $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$, så dess värden är möjliga, eftersom $|\cos \theta| \leq 1$. Vi får vidare att

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = -\frac{3}{10} \Leftrightarrow \theta = \arccos(-3/10) \approx 107.5^\circ.$$

■

Några specialfall

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$$

Att vi har ekvivalens ovan behöver en liten förklaring. Om ex.vis $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, nollvektorn, så blir $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ men är $\mathbf{0}$ vinkelrät mot en annan vektor $\mathbf{a}$? Svaret är "ja".

Nollvektorn är vinkelrät mot varje vektor. Eller mer generellt, nollvektorn $\mathbf{0}$ bildar alla vinklar med alla vektorer, per definition.

Exempel 5.4 Förenkla

$$2\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) - \mathbf{b}(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) + 2|\mathbf{a}|^2$$

och förenkla

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2$$

Lösning:

$$2\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) - \mathbf{b}(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) + 2|\mathbf{a}|^2 = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - 2|\mathbf{a}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - |\mathbf{b}|^2 + 2|\mathbf{a}|^2 = -|\mathbf{b}|^2.$$

och

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2.$$

Nu är sista termen

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \{\text{distr. lagen}\} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} =$$

$$|\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2.$$

$$\text{Alltså är } (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = 0$$

■

Nu är $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \theta \leq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot 1$, eftersom $|\cos \theta| \leq 1$. Den sista identiteten ger följande olikhet

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 \leq |\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2 = (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2.$$

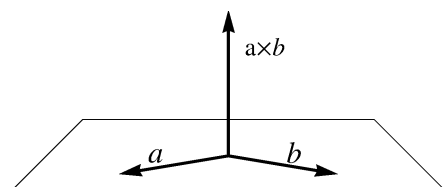
Genom att dra roten ur respektive led fås *triangelolikheten*

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|. \quad (5.2)$$

5.1.5 Vektorprodukt

För koordinatsystem och vektorer i $\mathbb{R}^3$ behövs en orientering av tre axlar eller tre vektorer. Med höger tumme, pekfinger och långfinger (i den ordningen) får man ett *högersystem*. Förutom skalärprodukt, som är ett reellt tal, finns vektoriell produkt eller vektorprodukt. För två vektorer $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ i (enbart) $\mathbb{R}^3$ definieras deras vektorprodukt $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, som den vektor

- (i) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ bildar ett högersystem,
- (ii) $\mathbf{a} \perp \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ och $\mathbf{b} \perp \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ och
- (iii) längden $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin \theta$, där θ är mellanliggande vinkel.



Några elementära egenskaper

1. $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (antikommutativitet).
2. $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$, nollvektorn (ty $\theta = 0^\circ$ och $\sin 0^\circ = 0$).
3. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$ med likhet omm $\theta = 90^\circ$.

Man kan visa att vektorprodukten inte är associativ (lätt) men *är* distributiv (svårt). Associativeten gäller inte trots att båda vektorerna

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \text{ och } \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

existerar.

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}. \quad (5.3)$$

(5.3) är vänsterdistributiva lagen. Även högerdistributiva lagen gäller.

Exempel 5.5 Låt $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ och $\mathbf{e}_z$ vara enhetsvektorer längs koordinataxlarna i $\mathbb{R}^3$ i ett högersystem.

Förenkla

- (a) $|\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y|$,
- (b) $\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x$,
- (c) $\mathbf{e}_x \cdot (\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x)$,
- (d) $(\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y) \times \mathbf{e}_x$ och $\mathbf{e}_x \times (\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x)$.

Lösning: Alla tre har längd 1 och är parvis vinkelräta mot varandra.

$$(a) \quad |\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y| = \sqrt{2}.$$

$$(b) \quad \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_z.$$

(c)

$$\mathbf{e}_x \cdot (\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z) = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = |\mathbf{e}_x|^2 = 1.$$

(d)

$$(\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y) \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y$$

och

$$\mathbf{e}_x \times (\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x) = \mathbf{e}_x \times (-\mathbf{e}_z) = \mathbf{e}_y.$$

Detta bevisar dock inte att vektorprodukten inte är associativ.

■

5.2 Vektor i koordinatsystem

En vektor i ett koordinatsystem har en representation som en Ortsvektor. Detta betyder att startpunkten är origo $0 = (0;0)$ eller $0 = (0;0;0)$ beroende vilket rum det handlar om. Vektorn representeras då av sin slutpunkt $P = (x;y)$. Vektorn

$$\overrightarrow{OP} = (x,y).$$

Observera skillnaden mellan koordinater för punkt och komponenter för vektor!

Exempel 5.6 Beräkna vektorn $\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, där $\mathbf{a} = (-1,2)$ och $\mathbf{b} = (1,3)$ i exempel 5.1. Beräkna också dess längd.

Lösning:

$$\mathbf{a} - 2\mathbf{b} = (-3, -4) \implies |\mathbf{a} - 2\mathbf{b}| = \dots = 5.$$

■

Vi kan skriva dessa vektorer $\mathbf{a} = (-1, 2)$ och $\mathbf{b} = (1, 3)$. Vi kan dessutom räkna ut skalärprodukten. Vi observerar först att

$$(x, 0) \cdot (0, y) = 0 \text{ eftersom } (x, 0) \perp (0, y).$$

Dock gör vi det först med bokstäver, ex.vismed $\mathbf{a} = (x_1, y_1)$ och $\mathbf{b} = (x_2, y_2)$. Distributiva lagen ger

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = ((x_1, 0) + (0, y_1)) \cdot ((x_2, 0) + (0, y_2)) = \\ &= (x_1, 0) \cdot (x_2, 0) + (0, y_1) \cdot (0, y_2) \end{aligned}$$

eftersom de två övriga produkterna $= 0$ (vinkelräta vektorer). Återstår $(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = |x_1| \cdot |x_2| \cdot \cos \theta$, och $(0, y_1) \cdot (0, y_2) = |y_1| \cdot |y_2| \cdot \cos \theta$. Antingen har x_1 och x_2 samma tecken och då är $\theta = 0^\circ$. Då är

$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = |x_1| \cdot |x_2| \cdot \cos 0^\circ = x_1 x_2 \cdot 1.$$

Eller så har x_1 och x_2 olika tecken och då är $\theta = 180^\circ$.

$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = |x_1| \cdot |x_2| \cdot \cos 180^\circ = -|x_1 x_2| = x_1 x_2.$$

P.s.s. med $(0, y_1) \cdot (0, y_2) = |y_1| \cdot |y_2| \cdot \cos \theta$. Alltså är

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2. \quad (5.4)$$

och p.s.s. för högre dimensioner.

Exempel 5.7 Vi skriver vektorerna i exempel 5.1 på komponentform: Bestäm vinkeln mellan vektorerna $\mathbf{a} = (-1, 2)$ och $\mathbf{b} = (1, 3)$.

Lösning: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (-1, 2) \cdot (1, 3) = -1 + 6 = 5.$

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{5}{\sqrt{5} \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \theta = 45^\circ.$$

■

Skalär produkt på komponentform ser likadan ut i alla dimensioner. Nedan ett exempel i $\mathbb{R}^3$.

Exempel 5.8 Bestäm vinkeln mellan vektorerna $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$ och $\mathbf{b} = (3, 5, 8)$.

Lösning:

$$\cos \theta = \frac{(1, 2, 1) \cdot (3, 5, 8)}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{9 + 25 + 64}} = \frac{21}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{98}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \theta = 30^\circ.$$

■

5.2.1 Enhetsvektor

Definition 3 En vektor $\mathbf{e}$ med längd 1 kallas enhetsvektor.

Vi använder detta för vektorprodukt nedan.

Exempel 5.9 Vektorn $\mathbf{a} = (-1, 2)$ är på komponentform och har längden $\sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Bestäm den enhetsvektor $\mathbf{e}$, som är parallell med $\mathbf{a}$.

Lösning: Det verkar naturligt att multiplicera $\mathbf{a}$ med $\frac{1}{\sqrt{5}}$ för att få en sådan enhetsvektor, alltså

$$\mathbf{e} = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{5}} (-1, 2).$$

Denna vektor är parallell med $\mathbf{a}$. Återstår att visa att den har längden 1.

$$|\mathbf{e}| = \left| \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2} = \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{4}{5}} = 1 \text{ eller}$$

$$|\mathbf{e}| = \frac{1}{\sqrt{5}} |(-1, 2)| = \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = 1.$$

■

Exempel 5.10 Speciellt är $(1, 0) := \mathbf{e}_x$ och $(0, 1) := \mathbf{e}_y$ enhetsvektorer parallella med x - respektive y -axeln. Vektorn $\mathbf{a} = (-1, 2)$ kan skrivas som...

$$\mathbf{a} = (-1, 2) = (-1, 0) + (0, 2) = -1(1, 0) + 2(0, 1) = -1 \cdot \mathbf{e}_x + 2 \cdot \mathbf{e}_y.$$

P.s.s. kan $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$ skrivas som

$$\mathbf{u} = (1, 2, 1) = (1, 0, 0) + (0, 2, 0) + (0, 0, 1) = \mathbf{e}_x + 2 \cdot \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \text{ där}$$

$$\begin{cases} \mathbf{e}_x &= (1, 0, 0) \\ \mathbf{e}_y &= (0, 1, 0) \\ \mathbf{e}_z &= (0, 0, 1) \end{cases} \quad (5.5)$$

är enhetsvektorer längs koordinataxlarna i $\mathbb{R}^3$. Sådana vektorer används som *bas* för ett koordinatsystem, s.k. basvektorer.

■

5.2.2 Vektorprodukt i komponentform

Vi börjar med enhetsvektorerna i (5.5). Bl.a. är

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 1) = \mathbf{e}_z.$$

Vidare är

$$(0, 1, 0) \times (0, 0, 1) = (1, 0, 0) \text{ och } (0, 0, 1) \times (1, 0, 0) = (0, 1, 0).$$

Därmed är ex.vis $(0, 1, 0) \times (1, 0, 0) = -(0, 0, 1)$. $(1, 0, 0) \times (1, 0, 0) = \mathbf{0} = (0, 0, 0)$.

Även här utnyttjar vi distributiva lagen, fast nu för vektorprodukt. För två vektorer $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ på komponentform

$$\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1) \text{ och } \mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$$

skall vi beräkna vektorprodukten

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2).$$

Vi skriver om

$$\mathbf{a} = x_1(1, 0, 0) + y_1(0, 1, 0) + z_1(0, 0, 1) \text{ och } \mathbf{b} = x_2(1, 0, 0) + y_2(0, 1, 0) + z_2(0, 0, 1).$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2) = \\ &= (x_1, 0, 0) \times (0, y_2, 0) + (x_1, 0, 0) \times (0, 0, z_2) + (0, y_1, 0) \times (x_2, 0, 0) + \\ &+ (0, y_1, 0) \times (0, 0, z_2) + (0, 0, z_1) \times (x_2, 0, 0) + (z_1, 0, 0) \times (0, y_2, 0) = \\ &= (x_1 y_2 - x_2 y_1)(0, 0, 1) + (z_1 x_2 - x_1 z_2)(0, 1, 0) + (y_1 z_2 - y_2 z_1)(1, 0, 0) = \\ &= (y_1 z_2 - y_2 z_1, z_1 x_2 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1). \end{aligned}$$

Denna produktregel för vektorer på komponentform är svår att komma ihåg. Man dock lätt beräkna den med en determinant:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \quad (5.6)$$

Exempel 5.11 Beräkna vektorprodukten mellan $\mathbf{a} = (1, 2, 1)$ och $\mathbf{b} = (3, 5, 8)$.

Lösning: Eftersom $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är nämnda i den ordningen är det $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ som skall beräknas och inte $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$. Som determinant blir den, enligt (5.6)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = (11, -5, -1).$$

Vi verifierar att $\mathbf{a} \perp \mathbf{a} \times \mathbf{b}$:

$$(1, 2, 1) \cdot (11, -5, -1) = 11 - 10 - 1 = 0.$$

Vi kan försöka beräkna vinkeln mellan vektorerna $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$:

$$\sin \theta = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|} = \frac{\sqrt{11^2 + (-5)^2 + (-1)^2}}{\sqrt{6} \cdot 7\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{6} \cdot 7\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Vi kan dock inte dra slutsatsen att $\theta = 30^\circ$ eftersom det finns en supplementvinkel med samma sinusvärde, nämligen $\theta = 150^\circ$.



5.2.3 Några tillämpningar

Givet tre punkter P , Q och R i $\mathbb{R}^3$. De tre punkterna är hörn i en triangel. Vi skall beräkna arean av triangeln m.h.a. Areasatsen, som säger att arean

$$T = \frac{ab \sin \theta}{2}$$

där a och b är två sidolängder i triangeln och θ mellanliggande vinkel. Man kan bilda två vektorer, $\mathbf{a} = \overrightarrow{PQ}$ och $\mathbf{b} = \overrightarrow{PR}$. Arean av triangeln är då

$$T = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{2}. \quad (5.7)$$

Observera att faktorn $\sin \theta$ är "inbyggd" i vektorprodukten.

Exempel 5.12 Punkterna $P(1;1;2)$, $Q = (2;3;3)$ och $R = (4;6;10)$ är hörn i en triangel. Beräkna triangelns area.

Lösning: Vi beräknar vektorerna

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (1, 2, 1) \text{ och } \mathbf{a} = \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = (3, 5, 8)$$

samma vektorer som i ett tidigare exempel. Triangelns area är

$$T = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{2} = \frac{|(11, -5, -1)|}{2} = \frac{\sqrt{147}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{2}.$$

■

5.2.4 Linje i $\mathbb{R}^n$

En linje i $\mathbb{R}^2$ kan skrivas som $ax + by + c = 0$, där inte både a och b är noll. Linjens ekvation skall vi skriva på *parameterform*.

Exempel 5.13 Givet linjen på formen $2x - 3y = 6$. Vi löser ut ex.vis $y = \frac{2x}{3} - 2$.

Vi kan sätta $x = 3t$ och får

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t - 2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vi kan skriva linjen ekvation som vektorer:

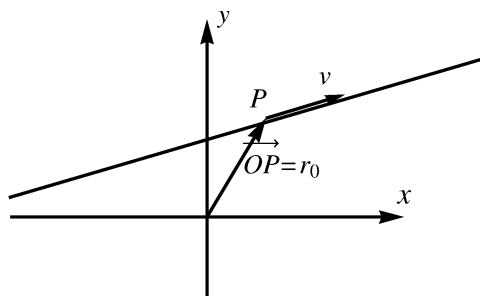
$$(x, y) = (0, -2) + t(3, 2), \quad t \in \mathbb{R}$$

■

Allmänt kan linjens ekvation på *vektorform* skrivas

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t \cdot \mathbf{b}. \quad (5.8)$$

där $\mathbf{r} = (x, y)$, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$ och $\mathbf{b} = (v_1, v_2)$, som är riktningsvektor för linjen.



P.s.s. kan en linje i $\mathbb{R}^3$ skrivas på vektorform och parameterform.

Exempel 5.14 Ge en ekvation för linjen som går genom punkterna $P = (1; 1; 2)$ och $Q = (2; 3; 3)$.

Lösning: Vi bildar en riktningsvektor $\vec{a} = \vec{PQ} = (2, 3, 3) - (1, 1, 2) = (1, 2, 1)$ samt vektorn $t(1, 2, 1) + (1, 1, 2) = (x, y, z)$, $t \in \mathbb{R}$. Detta är linjen på vektorform. Alternativt kan vi svara på *parameterform*

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t + 1 \\ z = t + 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

■

Exempel 5.15 Givet linjen i föregående exempel och linjen

$$(x, y, z) = t(1, 1, 1) + (0, 2, 1).$$

Skär linjerna varandra och i så fall i vilken punkt?

Lösning: Vi sätter

$$(x, y, z) = s(1, 1, 1) + (0, 2, 1) = t(1, 2, 1) + (1, 1, 2)$$

och löser det så uppkomna ES. Lösningen är $(s, t) = (3, 2)$ och alltså skär linjerna varandra i punkten

$$2(1; 2; 1) + (1; 1; 2) = (3; 5; 4).$$

■

Exempel 5.16 Givet tre punkter $P = (1; 1; 2)$, $Q = (2; 3; 3)$ och $R = (4; 6; 10)$. Dessa ligger *inte* på en linje. För att visa detta, ser vi att vektorerna $\vec{a} = \vec{PQ} = (1, 2, 1)$ och $\vec{b} = \vec{PR} = (3, 5, 8)$ inte är (anti-)parallella. (Om de vore (anti-)parallella vore ju deras vektorprodukt $\vec{0}$, nollvektorn.) Då definierar de tre punkterna ett plan i $\mathbb{R}^3$, nämligen planet Π som punkterna ligger i. En *normalvektor* till planet är $\vec{a} \times \vec{b} = (11, -5, -1) =: \vec{n}$. Ex.vis är P en punkt i planet.

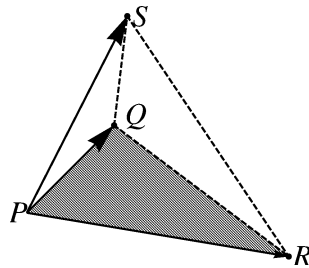
Att en punkt $(x; y; z) = X$ ligger i planet är ekvivalent med att vektorn $\vec{PX}$ är vinkelrät mot $\vec{n}$. Rita! Detta betyder att skalärprodukten $\vec{n} \cdot \vec{PX} = 0$. Utskrivet blir detta

$$(11, -5, -1) \cdot ((x, y, z) - (1, 1, 2)) = 11x - 5y - z - 4 = 0,$$

som är planets ekvation.

■

Exempel 5.17 Givet de tre punkterna ovan och en fjärde punkt $S = (3; 4; 5)$. Dessa fyra punkter är hörn i en tetraeder. Bestäm tetraederns volym.



Lösning: Bottenytan för tetraedern kan vara den som spänns upp av P , Q och R . Höjden är då $|\vec{PS}| \cdot \cos \varphi$, där φ är vinkeln mellan $\vec{n}$ och $\vec{PS} =: \vec{c}$. Volymen av en tetraeder är bottenytans area gånger höjden dividerat med 3. Volymen blir, så när som tecken,

$$V = \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}}{6}. \quad (5.9)$$

I detta fall är $\vec{c} = (2, 3, 3)$. Och

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (11, -5, -1) \cdot (2, 3, 3) = 4.$$

Volymen är alltså $V = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

■

Exempel 5.18 Beräkna avståndet mellan planet i exempel 5.16 och punkten $S = (3; 4; 5)$.

Lösning: Vi har att $(11, -5, -1) =: \vec{n}$ är normalvektor till planet Π och bildar vinkeln φ med $\vec{PS} =: \vec{c}$. Alltså är avståndet, så när som på tecken,

$$d = |\vec{PS}| \cdot \cos \varphi = |\vec{c}| \cdot \cos \varphi.$$

Nu är

$$\vec{n} \cdot \vec{c} = |\vec{n}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \varphi, .$$

Alltså är avståndet d , så när som på tecken

$$d = \frac{\vec{n} \cdot \vec{c}}{|\vec{n}|} \text{ och med siffror } d = \frac{(11, -5, -1) \cdot (2, 3, 3)}{7\sqrt{3}} = \frac{4}{7 \cdot \sqrt{3}}.$$

■

Avståndet mellan plan och punkt kan också skrivas på följande sätt. Vi börjar dock med att skriva om täljaren. Vi sätter $\vec{n} = (A, B, C)$, så att

$$\vec{n} \cdot \vec{c} = \vec{n} \cdot ((x, y, z) - \vec{OP}) = Ax + By + Cz + D$$

där $D = -\vec{n} \cdot \vec{OP}$. Avståndet är alltså

$$d = \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

5.2.5 Trippel skalär produkt

Produkten $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ med $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$ och $\mathbf{c} = (x_3, y_3, z_3)$, blir

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} - & \mathbf{c} & - \\ - & \mathbf{a} & - \\ - & \mathbf{b} & - \end{vmatrix} = \{\text{två radbyten}\} = \begin{vmatrix} - & \mathbf{a} & - \\ - & \mathbf{b} & - \\ - & \mathbf{c} & - \end{vmatrix} =$$

$$\{\text{två radbyten}\} = \begin{vmatrix} - & \mathbf{b} & - \\ - & \mathbf{c} & - \\ - & \mathbf{a} & - \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} - & \mathbf{c} & - \\ - & \mathbf{b} & - \\ - & \mathbf{a} & - \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} - & \mathbf{b} & - \\ - & \mathbf{a} & - \\ - & \mathbf{c} & - \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} - & \mathbf{a} & - \\ - & \mathbf{c} & - \\ - & \mathbf{b} & - \end{vmatrix}$$

där vi gjort 1 (ett)radbyte respektive 3 radbyten och därmed fått minustecknen. ” $-\mathbf{a}-$ ” betyder vektorn $\mathbf{a}$:s komponenter etc. Denna trippla skalära produkt skrivs också $[\mathbf{c} \ \mathbf{a} \ \mathbf{b}]$ etc.

5.2.6 Ytterligare tillämpningar

Exempel 5.19 Givet planet $\Pi : 11x - 5y - z - 4 = 0$ och linjen $L : \begin{cases} x = t + 6 \\ y = 4t + 1 \\ z = 1 - t \end{cases}$

. Beräkna skärningspunkten mellan planet och linjen.

Lösning: Vi sätter in x , y och z givet i L i planet Π :s ekvation.

$$0 = 11(t + 6) - 5(4t + 1) - (1 - t) - 4 = 56 - 8t \Leftrightarrow t = 7.$$

Detta värde på t sätts nu in i linjen L :s ekvation som ger

$$\begin{cases} x = 13 \\ y = 29 \\ z = -6 \end{cases}$$

■