

LINJÄR ALGEBRA

Innehåll

1	<i>Linjärt ekvationssystem (ES)</i>	5
2	Grundläggande algebra	13
3	Matrisalgebra	15
3.1	Addition av matriser	15
3.2	Multiplikation mellan matriser	17
3.3	Enhetsmatris	20
3.4	Invers matris	21
3.4.1	Nollmatris och homogent ES	26
4	Determinant	27
4.0.1	Determinanten av en enhetsmatris	27
4.0.2	Radoperationer i en determinant	29

2

Grundläggande algebra

3

Matrisalgebra

Nu lever matriser sitt eget liv, fritt från ekvationssystem. Men även ekvationssystem kan framställas med matrisalgebra. En matris är ett rektangulärt schema av element (tal).

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ & & \ddots & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Definition 1 Två matriser

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ & & \ddots & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,q} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,q} \\ & & \ddots & \\ b_{p,1} & b_{p,2} & \dots & b_{p,q} \end{bmatrix}$$

är lika om de är av samma typ d.v.s. $m = p$ och $n = q$ samt om varje element $a_{j,k} = b_{j,k}$ för $j = 1, 2, \dots, m$ och $k = 1, 2, \dots, n$, d.v.s. elementvis likhet.

Exempel 3.1

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & x \end{bmatrix}$$

är lika om $x = 6$.

■

Man kan teckna en totalmatris med högerled, som

$$[\mathbf{A}|\mathbf{B}] := \left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} & b_n \end{array} \right] \quad (3.2)$$

alltså motsvarande ett ES med n ekvationer och m obekanta/variabler $x_1, x_2, \dots, x_m$.

3.1 Addition av matriser

Exempel 3.2 Givet två märken på cykelramar. De har vardera tre olika modeller på ramarna. Följande matris anger pris utan moms på respektive ram i tusental kronor. Rad 1 är märke 1 och rad 2 märke 2.

$$\mathbf{A} = \begin{array}{l} \text{Märke 1} \\ \text{märke 2} \end{array} \begin{bmatrix} 9.0 & 12.0 & 20.0 \\ 10.0 & 14.0 & 20.0 \end{bmatrix}$$

Till dessa ramar har man valt 6 olika typer av hjul, till respektive modell på ramen med priserna (tusentals kronor utan moms)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1.5 & 3.5 & 5.0 \\ 1.5 & 4.0 & 5.5 \end{bmatrix}$$

Priset för en ram med två hjul för de 6 modellerna kan beräknas med matrisoperationer.

$$\mathbf{A} + 2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 12.0 & 19.0 & 30.0 \\ 13.0 & 22.0 & 31.0 \end{bmatrix} \text{ (kkr)}$$

■

Vi ser att addition (och subtraktion) av två matriser kräver att de är av samma typ. Dessutom ser vi att multiplikation med ett reellt tal (en skalär), i detta fall talet 2 innebär att samtliga element multipliceras med 2, alltså elementvis multiplikation med "skalären" 2..

Exempel 3.3 Med moms (25%) blir priset för ram+två hjul

$$1.25(\mathbf{A} + 2\mathbf{B}) = 1.25 \cdot \begin{bmatrix} 12.0 & 19.0 & 30.0 \\ 13.0 & 22.0 & 31.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.00 & 23.75 & 37.50 \\ 16.25 & 27.50 & 38.75 \end{bmatrix} \text{ kkr}$$

alltså elementvis multiplikation med "skalären" 1.25. Observera att multiplikationen är distributiv

$$1.25 \cdot (\mathbf{A} + 2\mathbf{B}) = 1.25 \cdot \mathbf{A} + 2.5 \cdot \mathbf{B}.$$

■

Allmänt kan alltså en matris $\mathbf{A}$ av typ $m \times n$ skrivas

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

alltså med element a_{jk} på plats (j, k) . För en matris $\mathbf{B}$, sådan att $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ skall vara möjligt krävs att

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

d.v.s. av samma typ $m \times n$. Summan

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

d.v.s. elementet på plats (j, k) i $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ är $a_{jk} + b_{jk}$, för $j = 1, 2, \dots, m$ och $k = 1, 2, \dots, n$.

3.2 Multiplikation mellan matriser

Först skall vi iaktaga ett samband mellan rader och kolumner i en matris.

Exempel 3.4 Matrisen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9. & 12. & 20. \\ 10. & 14 & 20 \end{bmatrix}$ har 2 rader och 3 kolumner. Vi ser vidare att

2	=	antal rader	=	antal element i en kolonn
3	=	antal kolumner	=	antal element i en rad

och detta är typiskt för alla matriser.

■

Vi börjar med det enkla fallet, då $\mathbf{A}$ endast har en rad och $\mathbf{B}$ endast har en kolonn. Detta ger den allmänna principen att rad i vänster matris "multipliceras" med kolonn i höger matris.

Exempel 3.5 Ex.vis är med $\mathbf{A} = [1\ 2\ 3]$ och $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = [1 \cdot a + 2 \cdot b + 3 \cdot c]$$

en matris av typ 1×1 , väsentligen ett element eller ett tal (om än med parenteser "[]" och " "). Vi ser att produktens typ är typ $\mathbf{A} = 1 \times 3$ och typ $\mathbf{B} = 3 \times 1$ och för produkten $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ är alltså typen $1 \times 3 \cdot 3 \cdot 1 = 1 \times 1$.

För produkten $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ mellan två matriser är det nödvändigt och tillräckligt att antal kolumner i $\mathbf{A}$ är lika med antal rader i $\mathbf{B}$.

■

För en (rad-)matris $\mathbf{A} = [a_{11} \ a_{12} \ a_{13}]$ och en (kolonn-)matris $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$ är

antal kolumner i $\mathbf{A}$ lika med antal rader i $\mathbf{B}$. Då och endast då är multiplikationen $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ möjlig. Produkten är en matris av ordning $1 \times 3 \cdot 3 \times 1 = 1 \times 1$, i princip ett reellt tal, närmare bestämt

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = [a_{11} \ a_{12} \ a_{13}] \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}]. \quad (3.3)$$

Principen för multiplikation mellan matriser är att ta

rad i vänster matris gånger kolonn i höger matris

som beskrivs i (3.3). Därför måste antal kolumner i vänster matris = antal rader i höger matris¹.

Exempel 3.6 För två matriser av rätt typer kan alltså multiplikation utföras. I exempel 1.1 har vi koefficientmatrisen $\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Vi skriver nu variablerna

¹Vi kommer att använda denna typ av multiplikation vid skalär produkt av vektorer.

och högerledet som matriser, $\mathbf{X} := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ och $\mathbf{B} := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Med *multiplikationen* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$ menas att rad j i $\mathbf{A}$ multipliceras "skalärt", med kolonn k i $\mathbf{X}$ som i (3.3). typ $\mathbf{A} = 2 \times 2$ och typ $\mathbf{X} = 2 \times 1$. Antal kolonner i $\mathbf{A}$ är 2 alltså lika med antal rader i $\mathbf{X}$. Produkten $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$ blir då en matris av typ $2 \times 2 \cdot 2 \times 1 = 2 \times 1$. Elementen i produkten $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$ är

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2x - y \\ x - y \end{bmatrix}$$

alltså vänster led i ekvationen i exempel 1.1.

Detta ekvationssystem kan alltså skrivas

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}.$$

Det ligger nu nära till hands att få fram $\mathbf{X}$ i exemplet ovan genom att dividera bort $\mathbf{A}$ i vänster led. Vi skall se på detta i nästa avsnitt, men först definiera multiplikation mellan två matriser. Vi börjar med en rad gånger en kolonn. För en rad

$$\mathbf{A} = [a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}]$$

och en kolonn

$$\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$$

av typ $1 \times n$ respektive $n \times 1$.

är

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1}.$$

$$\text{För matriser } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \text{ av typ } m \times p \text{ och } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{q1} & b_{q2} & \dots & b_{qm} \end{bmatrix}$$

av typ $q \times n$ är multiplikation definierad omm $p = q$, d.v.s.

omm antalet kolonner i vänster matris $\mathbf{A}$, =antal rader i höger matris $\mathbf{B}$.

Produkten $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} =: \mathbf{C}$ är då en matris av typ $m \times n$ med elementet

$$c_{jk} = a_{j1}b_{1k} + a_{j2}b_{2k} + \dots + a_{jp}b_{pk}$$

på plats (j, k) för $j = 1, 2, \dots, m$ och $k = 1, 2, \dots, n$.

Exempel 3.7 Vi skall göra en liknande beräkning av priset som i exempel 3.2 men bara för märke 1. Vi bildar matrisen med rampriset i första kolonn och hjulpriset i andra kolonn.

$$\mathbf{C} := \begin{bmatrix} 9. & 1.5 \\ 12. & 3.5 \\ 20. & 5. \end{bmatrix}.$$

Priset för ram+två hjul fås genom att multiplicera $C1$ med $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} =: \mathbf{F}$ från höger (enda möjligheten). Detta ger

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 9. & 1.5 \\ 12. & 3.5 \\ 20. & 5. \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \{\text{Blir en matris av typ } 3 \times 2 \cdot 2 \times 1\} = \begin{bmatrix} 12 \\ 19 \\ 30 \end{bmatrix}$$

■

Multiplikation mellan reella (komplexa) tal a , b och c uppfyller

$$\begin{aligned} a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c && \text{(Associativa lagen)} \\ a \cdot b &= b \cdot a && \text{(Kommutativa lagen)} \\ a \cdot b + a \cdot c &= a \cdot (b + c) && \text{(Distributiva lagen).} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Matrismultiplikation uppfyller den första och sista lagen, om matriserna är av Associativa lagen för multiplikation gäller:

Exempel 3.8 Matriserna

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ b_{3,1} \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \end{bmatrix}$$

är av typ 2×3 , 3×1 och 1×2 . Alltså är produkterna $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ och $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ definierade och ger en matris av typ

$$2 \times 3 \cdot 3 \times 1 \cdot 1 \times 2 = 2 \times 2.$$

Båda produkterna blir lika:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1}c_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1}c_{1,1} + a_{1,3}b_{3,1}c_{1,1} & a_{1,1}b_{1,1}c_{1,2} + a_{1,2}b_{2,1}c_{1,2} + a_{1,3}b_{3,1}c_{1,2} \\ a_{2,1}b_{1,1}c_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1}c_{1,1} + a_{2,3}b_{3,1}c_{1,1} & a_{2,1}b_{1,1}c_{1,2} + a_{2,2}b_{2,1}c_{1,2} + a_{2,3}b_{3,1}c_{1,2} \end{bmatrix}.$$

■

rätta typer, men inte kommutativitet.

Exempel 3.9 Givet matriserna $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ och $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Eftersom $\mathbf{B}$ och $\mathbf{C}$ är av typ 2×3 , kan de adderas men inte multipliceras. Däremot kan man multiplicera med $\mathbf{A}$ från vänster på både $\mathbf{B}$ och $\mathbf{C}$. Vi verifierar att $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ och $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ ger samma matris (av typ 2×3).

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \begin{bmatrix} 2a - 3d + 7 & 2b - 3e + 3 & 2c - 3f - 1 \\ a - d + 3 & b - e + 1 & c - f \end{bmatrix}.$$

P.s.s. är

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2a - 3d & 2b - 3e & 2c - 3f \\ a - d & b - e & c - f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

och vi ser att likhet gäller.

Exempel 3.10 Givet matrisen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Vilka matriser $\mathbf{B}$ uppfyller $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, d.v.s. kommuterar med $\mathbf{A}$?

Lösning: Först undersöker vi vilken typ $\mathbf{B}$ har. P.g.a. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ existerar, måste $\mathbf{B}$ ha 2 rader och p.g.a. $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ existerar, måste $\mathbf{B}$ ha 2 kolonner, d.v.s. typ $\mathbf{B} = 2 \times 2$, alltså samma typ som $\mathbf{A}$. Vi ansätter $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Sambandet $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ ger då 4 ekvationer.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv \begin{bmatrix} 2a-3c & 2b-3d \\ a-c & b-d \end{bmatrix} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} 2a+b & -3a-b \\ 2c+d & -3c-d \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-3c = 2a+b \\ 2b-3d = -3a-b \\ a-c = 2c+d \\ b-d = -3c-d \end{cases}.$$

Detta reduceras till att $c = -(b/3)$, $d = a+b$. d.v.s. $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b/3 & a+b \end{bmatrix}$.

■

Kommentarer

- I exemplet utgick vi från en kvadratisk matris $\mathbf{A}$.
- För att två matriser $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ skall kommutera, måste de vara kvadratiske av samma ordning (Övning: Visa det!).

3.3 Enhetsmatris

För multiplikation med vanliga, d.v.s. reella (eller komplexa) tal finns talet 1, ett "neutralt element". Vi vet ju att $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ för varje reellt (komplext) tal x . Motsvarande tal bland matriser är enhetsmatrisen av en given ordning, alltså en kvadratisk matris. Av ordning 2 är den

$$\mathbf{E} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Exempel 3.11 Matrisen $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ är av typ 2×3 . Alltså är multiplikationen $\mathbf{E} \cdot \mathbf{C}$ möjlig och ger en 2×3 -matris. Man ser att

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{C}.$$

För att multiplicera med en enhetsmatris från höger på $\mathbf{C}$ krävs det att den är av ordning 3. Denna matris är

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Exempel 3.12 Vi provar och finner att

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{C},$$

där $\mathbf{C}$ är samma matris som i föregående exempel och $\mathbf{E}$ är matrisen i (3.6).

3.4 Invers matris

För varje reellt (komplext) tal $x \neq 0$ finns ett inverterat tal/värde, ex.vis till talet $2/3$ är det inverterade talet

$$\frac{1}{\frac{2}{3}} = (2/3)^{-1} = 3/2.$$

För vissa kvadratiska matriser finns en invers matris.

Exempel 3.13 Givet matrisen $\mathbf{A}$ i kapitel 1 sidan 6, exempel 1.2 sidan kan skrivas

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \text{ där } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Inversmatrisen till $\mathbf{A}$ skrivs $\mathbf{A}^{-1}$, om den existerar, vilket den faktiskt gör i detta exempel. Den är

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Man observerar att både $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$ och $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$, vilket man lätt kan kontrollera. Vi använder inversmatrisen för att lösa detta ES.

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \implies \overbrace{\mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{X})}^{\text{VL}} = (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X} = \overbrace{\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}}^{\text{HL}}.$$

Vi får alltså lösningen $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$. Med siffror

$$\mathbf{X} \equiv \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix},$$

d.v.s. samma lösning som i exempel 1.2.

■

Kommentarer

- Eftersom inversmatrisen till koefficientmatrisen existerar, så får vi har *en* lösning detta exempel (som i 1.2).
- I exempel 1.3 och 1.4 har vi 0 respektive ∞ med lösningar. Dessa ES har samma koefficientmatris. Tydligen är det dess utseende som avgör om det finns 1 (en) lösning eller inte. Detta hänger ihop med om inversmatrisen existerar eller inte.
- Givet den kvadratiska matrisen av ordning 2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Ett "konditionstal" för en sådan matris är dess *determinant*. Det är

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Omm detta tal $\neq 0$ existerar inversmatrisen till $\mathbf{A}$ och den är

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

- För matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

är $\det \mathbf{A} = 2 \cdot (-1) - (-1) \cdot 1 = -1 \neq 0$. Alltså existerar inversmatrisen, som är (Jämför med exemplet ovan.)

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

- I exempel 1.5 är koefficientmatrisen inte kvadratisk och kan därför inte ha en inversmatris.

Exempel 3.14 Beräkna determinanten av matrisen i exempel 1.3.

Lösning:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-1) \cdot (-4) = 0.$$

■

Exempel 3.15 Koefficientmatrisen i exempel 1.7 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ är kvadratisk

och ES har *en* lösning. Man kan misstänka att dess determinant $\neq 0$ och dess invers(-matris) existerar. I själva verket är dess determinant $2 \neq 0$ och (således) existerar inversen. Den är

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -4 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vi multiplicerar ihop denna matris med $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}.$$

P.s.s. är $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$.

■

Exempel 3.16 Vi löser ES i exempel 1.7 men denna gång m.h.a. inversmatrisen i föregående exempel. Vi får att detta ES kan skrivas med matrismultiplikation, som

$$\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \dots$$

■

Hur determinant och invers matris beräknas för matriser av ordning 3 och högre undersöker vi längre fram.

Teorem 1 Givet en kvadratisk matris $\mathbf{A}$ och två matriser $\mathbf{B}$ och $\mathbf{C}$, sådana att $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{E}$. Då är $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

Satsen säger att om det finns en vänsterinvers och en högerinvers, $\mathbf{B}$ respektive $\mathbf{C}$, så är dessa lika.

Bevis:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{C}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C}.$$

Exempel 3.17 ES i exempel 1.5 har koefficientmatrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Man kan lätt visa att

$$\mathbf{A}_v^{-1} := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

är vänsterinvers till $\mathbf{A}$, d.v.s.

$$\mathbf{A}_v^{-1} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E} \text{ men } \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}_v^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -1 \\ 4 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \mathbf{E},$$

d.v.s. $\mathbf{A}_v^{-1}$ är inte högerinvers. Vi vet att ES i exempel 1.5 saknar lösning. Vad händer om vi löser detta ES med $\mathbf{A}_v^{-1}$?

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow^*) \mathbf{A}_v^{-1} \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{E} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A}_v^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = ***) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Uppenbarligen är denna lösning falsk eftersom detta ES saknar lösning. Var ligger "felet"? jo, vi har bara en implikation " $\Rightarrow$ " vid *). För att få implikationen " $\Leftarrow$ " måset vi multiplicera med $\mathbf{A}$ från vänster i likheten **). Detta ger

$$\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}_v^{-1} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_v^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

men $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}_v^{-1} \neq \mathbf{E}$, enligt ovan, d.v.s. $\mathbf{A}_v^{-1}$ är inte högerinvers. Vi kan slutligen verifiera att lösningen är falsk genom att sätta in lösningen i den ursprungliga ekvationen:

$$\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

■

Kommentarer

- Vissa matriser $\mathbf{A}$ av typ $m \times n$, med $m > n$ har vänsterinvers $\mathbf{A}_v^{-1}$ men denna matris kan inte vara högerinvers till $\mathbf{A}$.
- Användningen av en sådan vänsterinvers begränsar sig alltså till att man antingen vet att det finns en lösning eller till att ta fram en lösning och sedan kontrollera om den är sann eller falsk i den ursprungliga matrisekvationen.

Exempel 3.18 Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 2x - y = 11 \\ x - y = 7 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$ med samma metod som i föregående exempel.

Lösning:

$$\mathbf{A}_v^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A}_v^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Vi sätter in denna lösning i den ursprungliga matrisekvationen.

$$\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

och alltså är lösningen $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$.

■

Invers matris med Jacobis metod

Exempel 3.19 Matrisen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ är koefficientmatris i exempel 1.7.

Högerled är $\mathbf{B} := \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Vi skall lösa detta ES m.h.a. invers matris. Alltså skall

vi bestämma $\mathbf{A}^{-1}$. Vi ser $\mathbf{A}^{-1} \equiv \mathbf{X} (= \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix})$ som en okänd matris av

typ 3×3 (ordning 3). $\mathbf{X}$ skall uppfylla $\mathbf{AX} = \mathbf{E}$. Detta skriver vi som en totalmatris, som vi sedan överför på radreducerad form.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right]$$

Denna sista totalmatris betyder

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \{\text{alltså}\} = \mathbf{X} \equiv \mathbf{A}^{-1}.$$

Alltså kan vi lösa matrisekvationen

$$\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{B} :$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \dots = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} .$$

■

Matrisekvation

Exempel 3.20 Vi skall nu lösa matrisekvationen (d.v.s. bestämma matrisen $\mathbf{X}$)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = 2\mathbf{X} + \mathbf{B}$$

där $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Lösning: Vi skriver om ekvationen som

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} - 2\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} - 2\mathbf{E} \cdot \mathbf{X} = (\mathbf{A} - 2\mathbf{E}) \cdot \mathbf{X} \Leftrightarrow \mathbf{X} = (\mathbf{A} - 2\mathbf{E})^{-1} \cdot \mathbf{B},$$

om inversmatrisen $(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})^{-1}$ existerar. Nu är

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = 1 \neq 0.$$

Alltså existerar inversen, som är

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrisekvationen har alltså lösningen

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A} - 2\mathbf{E})^{-1} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -5 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

■

Transponatmatris

Vi transponerar först en matris av typ 2×3 . Givet matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix} .$$

Dess transponat är matrisen

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} \end{bmatrix}$$

Definition 2 Givet matrisen $\mathbf{A} = (a_{j,k})$ av typ $m \times n$. Transponatmatrisen är då $\mathbf{A}^T = (a_{k,j})$ av typ $n \times m$.

Exempel 3.21 Givet ES i exempel 1.2. Det kan skrivas som en matrisekvation

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

där $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ och $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Vi skall "vända" på samtliga matriser och ändå få samma ES. samtliga matriser:

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}^T = [x \quad y] \quad \text{och} \quad \mathbf{B}^T = [1 \quad 2].$$

Vi ser att matrisekvationen kan skrivas

$$\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{B}^T,$$

om vi multiplicerar ihop matriserna i VL och sätter produkten lika med HL. Utraäknat blir ju detta

$$\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{A}^T = [2x - y \quad x - y] = \mathbf{B}^T = [1 \quad 2].$$

som är det ursprungliga ES.

Observera att typ $\mathbf{X}^T = 1 \times 2$ och typ $\mathbf{A}^T = 2 \times 2$, så att matrisprodukten i VL existerar och är av typ 1×2 . HL:s matris är också av typ 1×2 .

■

Allmänt gäller att

$$\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T \quad (3.8)$$

Bevis:

HL: Element på plats (k, i) i $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T$ är detsamma som element på plats (i, k) i $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. Detta element är produkten av rad i i $\mathbf{A}$ och kolonn k i $\mathbf{B}$.

VL: Element på plats (k, i) i $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$ är produkten av rad k i $\mathbf{B}^T$ och kolonn i i $\mathbf{A}^T$, d.v.s. produkten av kolonn k i $\mathbf{B}$ och rad i i $\mathbf{A}$.

3.4.1 Nollmatris och homogent ES

En nollmatris är en matris med alla element $= 0$.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

är nollmatrisen av typ 3×2 . Ett homogent ES har ett HL, som matris är ren nollmatris.

Exempel 3.22 Följande ES skrivet som en matrisekvation är ett homogent ES (Samma koefficientmatris som i exempel 1.5).

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{0},$$

där $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ och (därmed) $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Man ser att $x = y = z = 0$ är lösning. Detta är typiskt för ett homogent ES. På matrisform...

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Vi ser att rangen för koefficient- och totalmatris är lika = 2. Detta är också typiskt för ett sådant ES. Antal lösningar är i detta fall 1. Allmänt har ett homogent ES 1 eller ∞ med lösningar.

■

Exempel 3.23 Följande ES har samma koefficientmatris som i exempel 1.6 men homogent sådant är följande

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \text{ och som matrisekvation } \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

På radreducerad form

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \right]$$

Alltså en fri variabel z och således ∞ med lösningar. Vi ser att rangen för koefficient- och totalmatris är lika < antal variabler = 3. Svar:

$$\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

■