

LINJÄR ALGEBRA

Innehåll

1	<i>Linjärt ekvationssystem (ES)</i>	5
2	Grundläggande algebra	13
3	Matrisalgebra	15
3.1	Addition av matriser	15
3.2	Multiplikation mellan matriser	17
3.3	Enhetsmatris	20
3.4	Invers matris	21
3.4.1	Nollmatris och homogent ES	26
4	Determinant	29
4.0.2	Determinanten av en enhetsmatris	29
4.0.3	Radoperationer i en determinant	31
5	Vektorer	33
5.1	Geometrisk vektor	33
5.1.1	Längd av vektor	33
5.1.2	Vinkel mellan två vektorer	33
5.1.3	Addition av vektorer	34
5.1.4	Skalär produkt	34
5.1.5	Vektorprodukt	35
5.2	Vektor i koordinatsystem	36
5.2.1	Enhetsvektor	38
5.2.2	Vektorprodukt i komponentform	38
5.2.3	Några tillämpningar	39
5.2.4	Linje i $\mathbb{R}^n$	40
5.2.5	Trippel skalär produkt	42
6	Minsta kvadratmetoden	43

2

Grundläggande algebra

6

Minsta kvadratmetoden

Denna metod går ut på att ge en approximativ lösning på ett ES, som saknar lösning.

Exempel 6.1 I exempel 1.5 har vi ES

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = 2 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$$

Det har fler ekvationer (3) än obekanta (2) och saknar lösning (0 lösningar). Ett försök görs i exempel 3.17 m.h.a. av en vänsterinvers $\mathbf{A}_v^{-1}$ till koefficientmatrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Vi löser det ES som får om vi multiplicerar med transponatet } \mathbf{A}^T$$

från vänster. Detta kallas det felutjämnade systemet. I detta fall blir det

$$\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{B} \implies \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B},$$

$$\text{där } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}. \text{ Nu är}$$

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ så att } \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} =: \mathbf{C}$ är inverterbar med invers $\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{42} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 14 \end{bmatrix}$. Genom att multiplicera med denna invers från vänster, får vi

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{42} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Denna lösning är uppenbarligen en falsk lösning till det ursprungliga ES men är den bästa lösningen i Minsta Kvadratmetodens mening.

■

Exempel 6.2 Lösningen i föregående exempel är alltså falsk. Man får ett fel, om man sätter in denna lösning i det ursprungliga ES. Vi får *felvektorn*

$$\mathbf{f} = \mathbf{A} \cdot \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix} - \mathbf{B} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Medelfelet definieras som $\eta := \frac{|f|}{\sqrt{m}}$, där m är antal ekvationer i det ursprungliga ES. Här $m = 3$, så att

$$\eta = \frac{\sqrt{4^2 + (-5)^2 + (-1)^2}}{7 \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{42}}{7 \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{7}} \approx 0.53.$$

■

För att anpassa en linje $y = kx + m$ till tre punkter i planet kan man använda MK-metoden. Det är då k och m som är variabler! Givet punkterna $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ och $(x_3; y_3)$. Vi sätter in dessa punkter i $kx + m = y$ och får

$$\begin{aligned} kx_1 + m &= y_1 \\ kx_2 + m &= y_2 \\ kx_3 + m &= y_3 \end{aligned} \quad \text{eller som matrisekvation} \quad \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Vi multiplicerar med $\mathbf{A}^T$ från vänster och får

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \\ y_1 + y_2 + y_3 \end{bmatrix}$$

Exempel 6.3 Anpassa en linje $y = kx + m$ till punkterna $(1;2)$, $(2;4)$ och $(3;7)$. Beräkna också medelfelet.

Lösning: Med beteckningar som ovan, får vi

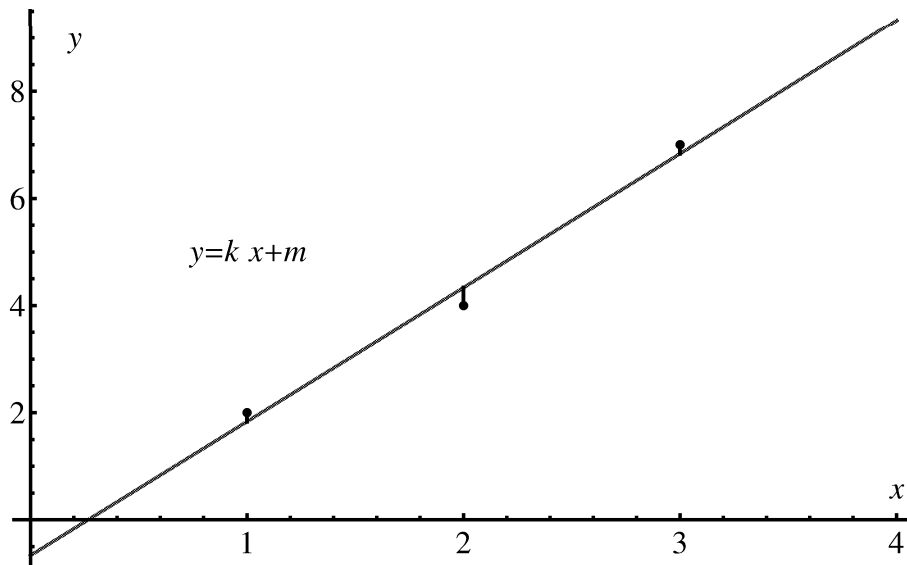
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{A}^T \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ 13 \end{bmatrix}$$

så att

$$\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 31 \\ 13 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 14 \end{bmatrix}.$$

Lösningen blir därmed

$$\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 31 \\ 13 \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$



För att beräkna medelfelet, beräknar vi först felvektorn f .

$$f = A \cdot \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 2 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

med medelfel

$$\eta = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{\frac{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \approx 0.2357.$$

■