Linjär algebra

Innehåll

2

Grundläggande algebra

6

Minsta kvadratmetoden

Denna metod går ut på att ge en approximativ lösning på ett ES, som saknar lösning.

Exempel 6.1 I exempel 1.5 har vi ES

$$\begin{cases} 2x - y &= 1 \\ x - y &= 2 \\ 3x + y &= 0 \end{cases}$$

Det har fler ekvationer (3) än obekanta (2) och saknar lösning (0 lösningar). Ett försök görs i exempel 3.17 m.h.a. av en vänsterinvers $\boldsymbol{A}_v^{-1}$ till koefficientmatrisen $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Vi löser det ES som får om vi multiplicerar med transponatet $\boldsymbol{A}^T$ från vänster. Detta kallas det felutjämnade systemet. I detta fall blir det

$$\boldsymbol{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \boldsymbol{B} \Longrightarrow \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{B},$$

där $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Nu är

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ så att } \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A} =: \boldsymbol{C}$ är inverterbar med invers $\boldsymbol{C}^{-1} = \dfrac{1}{42} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 14 \end{bmatrix}$. Genom att multiplicera med denna invers från vänster, får vi

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{42} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Denna lösning är uppenbarligen en falsk lösning till det ursprungliga ES men är den bästa lösningen i <u>M</u>insta <u>K</u>vadratmetodens mening.

■

Exempel 6.2 Lösningen i föregående exempel är alltså falsk. Man får ett fel, om man sätter in denna lösning i det ursprungliga ES. Vi får *felvektorn*

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{A} \cdot \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix} - \boldsymbol{B} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Medelfelet definieras som $\eta := \dfrac{|\boldsymbol{f}|}{\sqrt{m}}$, där m är antal ekvationer i det ursprungliga ES. Här $m = 3$, så att

$$\eta = \frac{\sqrt{4^2 + (-5)^2 + (-1)^2}}{7 \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{42}}{7 \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{7}} \approx 0.53\,.$$

■

För att anpassa en linje $y = kx + m$ till tre punkter i planet kan man använda MK-metoden. Det är då k och m som är variabler! Givet punkterna $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ och $(x_3; y_3)$. Vi sätter in dessa punkter i $kx + m = y$ och får

$$\begin{aligned} kx_1 + m &= y_1 \\ kx_2 + m &= y_2 \\ kx_3 + m &= y_3 \end{aligned} \quad \text{eller som matrisekvation} \quad \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Matrisen

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Vi multiplicerar med $\boldsymbol{A}^T$ från vänster och får

$$\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}^T \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \\ y_1 + y_2 + y_3 \end{bmatrix}$$

Exempel 6.3 Anpassa en linje $y = kx + m$ till punkterna $(1;2)$, $(2;4)$ och $(3;7)$. Beräkna också medelfelet.

Lösning: Med beteckningar som ovan, får vi

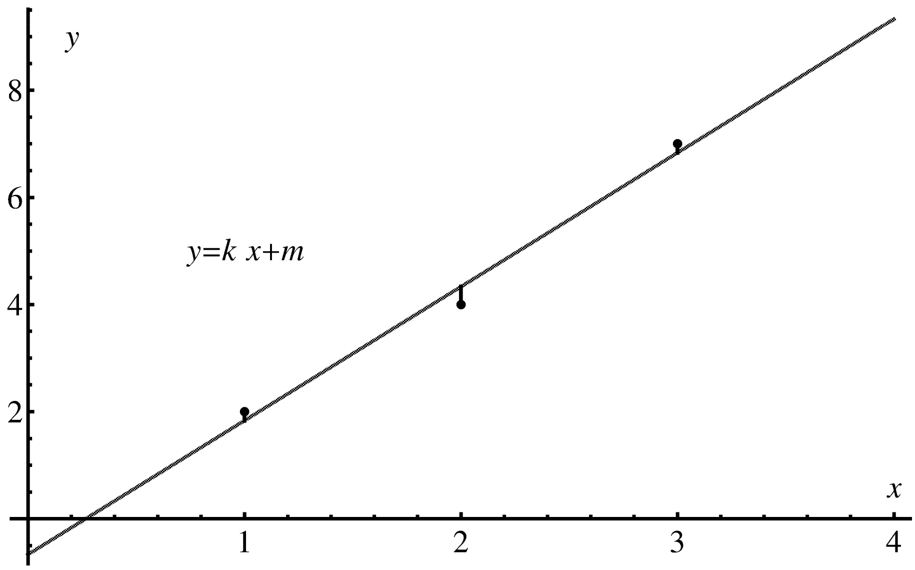
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \text{ och } \boldsymbol{A}^T \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ 13 \end{bmatrix}$$

så att

$$\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = (\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A})^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 31 \\ 13 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 14 \end{bmatrix}.$$

Lösningen blir därmed

$$\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 31 \\ 13 \end{bmatrix} = \ldots = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$



För att beräkna medelfelet, beräknar vi först felvektorn $\boldsymbol{f}$.

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{A} \cdot \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

med medelfel

$$\eta = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{\frac{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \approx 0.2357\,.$$

■