Repetitionsuppgifter i Linjär algebra och komplexa tal, för DAI1 och EI1

1. Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ \\ 2x + y = -2 \\ \\ 3x + y = 4 \end{cases}$$

   (a) Lös ekvationssystemet.

   (b) Lös motsvarande felutjämnande ekvationssystem.

   (c) Beräkna medelfelet.

   (d) Som matrisekvation blri koefficientmatrisen i (a) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.
   Visa att $\boldsymbol{A}$ har en vänsterinvers $\boldsymbol{A}_v^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ och lös ekvationssystemet i (a) m.h.a. denna matris. Förklara varför man erhåller en falsk lösning.

2. Ekvationssystemet $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + 2z = -2 \\ z = 1 \end{cases}$ är givet.

   (a) Beräkna determinanten och inversmatrisen till koefficientmatrisen.

   (b) Beräkna y med Cramers regel.

   (c) Lös ekvationssystemet fullständigt m.h.a. inversmatrisen i (a).

3. Givet punkterna $P = (2;,1;-1)$, $Q = (1;4;1)$ och $R = (3;5;4)$.

   (a) Betäm en ekvation för linjen genom punkterna P och Q.

   (b) Bestäm arean av triangeln med hörn i de tre punkterna.

   (c) Bestäm en ekvation för planet, som innehåller de tre punkterna.

   (d) Bestäm projektionspunkten av punkten R på linjen i (a).

4. Betrakta polynomet $f(z) = 4z^3 + 12z^2 + z + 3$.

   (a) Lös ekvationen $f(z) = 0$.

   (b) Skriv $f(z)$ som en produkt av förstagradspolynom.

5. Polynomet $g(z) = z^2 - (2 + 2j)z + (3 - 2j)$ är givet.

   (a) Lös ekvationen $g(z) = 0$.

   (b) Skriv $g(z)$ som en produkt av förstagradspolynom.

6. $h(z) = z^4 + 4$ är ett binom.

   (a) Lös ekvationen $h(z) = 0$.

   (b) Skriv $h(z)$ som en produkt av två reella andragradspolynom.

Förslag till svar

1. (a) ES saknar lösning.

   (b) $x = 3/2, \quad y = -2.$

   (c) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}.$

   (d) Som matrisekvation blri koefficientmatrisen i (a) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$

$$\boldsymbol{A}_v^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   som ger $(x; y) = (15; -5)$, som är falsk lösning. Man erhåller en falsk lösning eftersom man enbart har " $\Rightarrow$ ".

2. (a) $\det \boldsymbol{A} = 1$ och $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

   (b) $y = -4.$

   (c) Ekvationssystemet har lösningen $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}.$

3. Givet punkterna $P = (2; , 1; -1)$, $Q = (1; 4; 1)$ och $R = (3; 5; 4)$.

   (a) En ekvation för linjen genom punkterna P och Q är $(x; y; z) = (2 - t; 1 + 3t; 2t - 1)$, där $t \in \mathbb{R}$.

   (b) Arean av triangeln med hörn i de tre punkterna är $T = \dfrac{7\sqrt{3}}{2}.$

   (c) En ekvation för planet, som innehåller de tre punkterna är $x + y - z - 4 = 0$.

   (d) Projektionspunkten av punkten R på linjen i (a) är $(x; y; z) = \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{11}{2}; 2\right).$

4. (a)

$$f(z) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} z = j/2 \\ z = -j/2 \\ z = -3 \end{cases}$$

   (b) $f(z) = (z + 3)(2z - j)(2z + j)$, som en produkt av förstagradspolynom.

5. Polynomet $g(z) = z^2 - (2 + 2j)z + (3 - 2j)$ är givet.

   (a) ekvationen $g(z) = 0$ har rötterna $z = -j$ och $z = 2 + 3j$.

   (b) $g(z) = (z + j)(z - 2 - 3j)$, som en produkt av förstagradspolynom.

6. $h(z) = z^4 + 4$ är ett binom.

   (a) Ekvationen $h(z) = 0$ har rötterna $z = -1 \pm j$ och $z = 1 \pm j$.

   (b) $h(z) = \left(z^2 - 2z + 2\right)\left(z^2 + 2z + 2\right)$ som en produkt av två reella andragradspolynom.