

Lite om rotekvationer

Rotekvationer illustrerar vikten av att förstå implikation och ekvivalens.

Givet en ekvation $f(x) = 0$. Om man kan visa

$$f(x) = 0 \implies \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases}, \quad (1)$$

så återfinns alla rötter till ekvationen bland $x = x_1$ och $x = x_2$, eventuellt kan någontida eller båda av dessa vara falska. Detta är fallet när man har en rotekvation.

1. Lös ekvationen $\sqrt{x+3} - 4 = x$.

Lösning: Se först till att rottetcknet hamnar ensamt i endera ledet.

$$\sqrt{x+3} - 4 = x \iff \sqrt{x+3} = x + 4 \Rightarrow x + 3 = (x + 4)^2 \iff x^2 + 7x + 13 = 0 \iff$$

$$x = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 13} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}$$

och roten ur det negativa talet $-\frac{3}{4}$ existerar inte (som reellt tal). Alltså saknar den ursprungliga ekvationen rötter.

2. Lös ekvationen $\sqrt{x+3} - \frac{x}{2} = 1$.

Lösning:

$$\sqrt{x+3} - \frac{x}{2} = 1 \iff \sqrt{x+3} = \frac{x}{2} + 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - 2 = 0 \iff x = \pm 2\sqrt{2}.$$

P.g.a. " $\Rightarrow$ ", kan en eller båda vara falska. Eftersom $\sqrt{x+3} \geq 0$, måste $\frac{x}{2} + 1 \geq 0$ för en eventuell rot till ekvationen. Dett är också tillräckligt för att roten skall vara riktig. Vi undersöker

$$\frac{x}{2} + 1 = \frac{-2\sqrt{2}}{2} + 1 = -\sqrt{2} + 1 < 0$$

och alltså är den roten falsk. Insättning av $x = +2\sqrt{2}$ ger ett tal ≥ 0 . Alltså är den roten riktig.

3. Lös ekvationen $\sqrt{x+3} - 2 = \frac{x}{2}$.

Lösning: Även här kvadrerar vi efter att ha flyttat över termen -2 till HL:

$$\sqrt{x+3} - 2 = \frac{x}{2} \iff \sqrt{x+3} = \frac{x}{2} + 2 \Rightarrow x+3 = \frac{x^2}{4} + 2x + 4.$$

Den sista ekvationen har dubbelroten $x = -2$. Vi sätter in $x = -2$ i uttrycket $\frac{x}{2} + 2$ och konstaterar att

$$\frac{-2}{2} + 2 = 1 \geq 0$$

och alltså är $x = -2$ roten till den ursprungliga ekvationen.

4. Lös ekvationen $3\sqrt{x+3} = x+5$.

Lösning: Vi kvadrerar båda led.

$$3\sqrt{x+3} = x+5 \Rightarrow 9(x+3) = x^2 + 10x + 25 \iff \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vi skall alltså undersöka om $x+5 \geq 0$ eller inte för dessa x . Eftersom rötterna är heltal, är det dock enkelt att kontrollera dessa genom att sätta in dem i den ursprungliga ekvationen.

$$x = -2 \Rightarrow 3\sqrt{x+3} = 3\sqrt{(-2)+3} = 3 \text{ och } x+5 = -2+5 = 3.$$

Eftersom VL och HL är lika ($= 3$), är $x = -2$ en riktig rot. P.s.s. visar sig $x = 1$ var en riktig rot.

5. I ekvationen $\sqrt{x}-1 = \sqrt{x+1}$ finns två rötter. Genom att kvadrera en gång erhåller man

$$\dots \Rightarrow (\sqrt{x}-1)^2 = x - 2\sqrt{x} \cdot 1 + 1^2 = (\sqrt{x+1})^2 = x+1$$

$$\iff -2\sqrt{x} = 0 \Rightarrow 4x = 0 \iff x = 0.$$

Man får alltså kvadrera två gånger och p.g.a. " $\Rightarrow$ " är $x = 0$ enda möjliga rot. Det enklaste att kontrollera om den är riktig, är genom att sätta in $x = 0$ i den ursprungliga ekvationen. VL: $\sqrt{0}-1 = -1$ och HL: $\sqrt{0+1} = 1$. Därmed saknar ekvationen rötter.

Kommentarer

- I 4. är båda rötterna riktiga. Detta visar att man har ekvivalens i *alla* led.
- I 2. är det svårt men inte omöjligt, att sätta in $x = 2\sqrt{2}$ i den ursprungliga ekvationen och verifiera att/om roten satisfierar ekvationen. VL är

$$\sqrt{x+3} = \sqrt{2\sqrt{2}+3} = \{\text{K.K.}\} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 + 1^2} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1.$$

HL är $\frac{x}{2} + 1 = \frac{2\sqrt{2}}{2} + 1 = \sqrt{2} + 1$, och alltså är $x = 2\sqrt{2}$ en riktig rot.